COMPTES RENDUS

(DOKLADY)

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

NOUVELLE SÉRIE

1937

VOLUME XVI

№ 3

ÉDITION DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
MOSCOU

AVIS AUX AUTEURS

Les «Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS» paraissent tous les dix jours, neuf numéros formant un volume d'environ 500 pages pourvu d'une table des matières.

Les «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS» publient des communications courtes précisant l'essentiel des travaux plus volumineux en préparation. Ces articles, ne dépassant pas comme règle dix mille signes typographiques, sont donnés en l'une des trois langues: français, anglais, allemand. Ils embrassent les sciences mathématiques, physiques, naturelles et techniques, reproduisant les résultats de recherches scientifiques actuellement en cours ou à peine achevées qui représentent les plus récentes données de l'investigation scientifique.

Les auteurs ont droit chacun à 25 extraits gratuits.

Les manuscrits doivent être adressés à la Rédaction des «Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS»—Moscou, oulitza Koujbysheva, 8.

25 Juillet

COMPTES RENDUS

(DOKLADY)

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

COMITÉ DE RÉDACTION

A. Borissiak, de l'Académie, A. Fersman, de l'Académie, A. Frumkin, de l'Académie, A. Richter, de l'Académie, S. Wawilow, de l'Académie

NOUVELLE SÉRIE

5-me année

Paraissant tous les dix jours

1937

VOLUME XVI № 3

TABLE DES MATIÈRES

MATHÉMATIQUES

I. M. Vinogradow. Member of the Academy. Some New Problems of the Theory of Primes 131

B. Saltykov. Über die Auflösung der Integralgleichung von N. Moisseiev in der Theorie der nichtregularisierten Geoidfigur 133
—Über die quasi-Stokessche Form der Integralgleichung von N. Moisseiev für das nichtregularisierte Geoid 138

M. Keldyš (Keldysch) et **M. Lavrentiev.** Sur l'unicité de la solution du problème de Neumann 141

B. Fuchs. Über die Gruppe der analytischen Bewegungen der invarianten bei pseudokonformen Abbildungen Geometrie 143
Correction to the note «On the Moment Problem for a Finite Interval» by L. V. Kantorovič 147

MÉCANIQUE

L. Magnaradze. Les problèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité à deux dimensions pour les contours à points anguleux 149

I. N. Vécoua. Sur une représentation complexe de la solution générale des équations du problème stationnaire plan de la théorie de l'élasticité 155

HYDRODYNAMIQUE

V. A. Gavrilenko. Additional Considerations Regarding the Distribution of Velocities in Turbulent Uniform Flow 161

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

V. Kupradze. Zur Theorie der elektromagnetischen Schwingungen im ebenen nichthomogenen Felde 165

PHYSIQUE DU GLOBE

N. K. Mihal. Über die Bestimmung der Lotablenkung aus den Anomalien im Horizontalgradienten der Erdschwere 169

ZOOLOGIE

A. I. Kurencov. Fundamental Regularities in the Distribution of the Dendrophilous Lepidopterous fauna *(Macrolepidoptera)* in the Ussuri Province 173

B. A. Zenkovič. Weighing of Whales 177

EMBRYOLOGIE

E. Andrejeva. Die Verknöcherung des Extremitätenskeletts der kirgisischen Fettsteisschafembryonen 183

A. A. Terentjeva. Die Entwicklung der Wolldecke bei den kirgisischen Fettsteisschafen 189

Rédacteur en chef A. Fersman. . . . . Rédacteur S. Bernstein.

En composition 28/VI 1937. En impression 10/VIII 1937. Nombre de feuilles d'impriession 4. Nombre de caractères par feuille d'impression 65.000 Pages 129—192. Format du papier 72×110 cm. Tirage 1300. Moscou. Glavlit B—15348. Numéro d'édition 741. Numéro typographique 1069.

Imprimerie № 16. Moscou, Trekhproudnyi péréoulok, 9.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

MATHEMATICS

SOME NEW PROBLEMS OF THE THEORY OF PRIMES

By I. M. VINOGRADOW, Member of the Academy

We introduce the following notations:
p is a prime.
ϑ is a real number; $|\vartheta| \leqslant 1$
N is an integer $\geqslant N_0$, where N_0 is a sufficiently large constant; $n = \log N$.

The notations $A \ll B$; $B \gg A$; $A = O(B)$ with $B > 0$ show that the ratio $\frac{|A|}{B}$ does not exceed a certain constant.

$\{z\}$ denotes the fractional part of the real number z.

In my note (1) «Representation of an odd number as a sum of three primes» I have given a special method for the estimation of the sum

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}$$

By development of the same method (without introduction of essential modifications) I have received some other results concerning the theory of primes. In the present note I state some of these results.

1. Let k be an integral constant > 1 and h a constant > 1. Then it is possible to indicate a positive constant $h_0 = h_0(h, k)$ such that for α satisfying the conditions

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\vartheta}{q\tau}; \quad (a, q) = 1; \quad n^{h_0} \leqslant q \leqslant \tau; \quad \tau = N^k n^{-h_0}$$

we have

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p^k} \ll N n^{-h}.$$

2. By application of this estimation and by a corresponding extention of the method of the named note I proved the following theorem. If r satisfy two conditions

$$r \geqslant (k-2)\,2^k + 11, \quad \text{for} \quad k < 14$$

$$r \geqslant \left(2 + 4\frac{\log\log k}{\log k}\right) k^3 \log k + 1, \quad \text{for} \quad k \geqslant 14,$$

then we have for the number of representations I_N of N in the form

$$N = p_1^k + \ldots + p_r^k$$

the formula

$$I_N = \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^r}{\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)} \cdot \frac{N^{\frac{r}{k}-1}}{n^r} S_k(N) + O\left(\frac{N^{\frac{r}{k}-1}}{n^{r+\varepsilon}}\right),$$

where ε is a positive constant and

$$S_k(N) = \sum_{q=1}^{\infty} W(q); \quad W(q) = q_1^{-r} \sum_{\substack{(a,\ q)=1 \\ 0 \leqslant a < q}} R_{aq}^r \, e^{-2\pi i \frac{a}{q} N};$$

$$q_1 = \varphi(q); \quad R_{aq} = \sum_{\substack{(x,\ q)=1 \\ 0 \leqslant x < q}} e^{2\pi i \frac{a}{q} x^k}.$$

3. From this result we deduce the following: for every integer $k > 1$ it is possible to find $N_0 = N_0(k)$ and $s = s(k)$ such that every integer $N \geqslant N_0$ can be represented as a sum of s or less terms of the form p^k, where p is a prime.

4. I have considered by the same method the case $k = 2$ and I have obtained for the number of representations I_N of an integer N of the form

$$N = 24m + 5$$

as a sum

$$N = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 \tag{1}$$

the formula

$$I_N = \frac{\pi^2}{24} \frac{N^{\frac{3}{2}}}{n^5} S(N)[1 + O(n^{-\varepsilon})],$$

where ε is a positive constant and $S_2(N)$ is the special case of the sum $S_k(N)$ considered above ($r = 5$; $k = 2$) and

$$S_2(N) \geqslant c; \quad c \text{ is a positive constant.}$$

5. It follows from the result 4 that every integer $N \geqslant N_0$ (where N_0 is a sufficiently large positive constant) of the form

$$N = 24m + 5$$

can be represented in the form (1).

6. The reasonings will be changed a little if we consider the sum

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha m p^k}; \quad k \geqslant 1, \tag{2}$$

instead of the sum in the result 1. Here m is an integer > 0 of the order $n^{h'}$; h' is constant and > 1.

Besides

$$h_0 = h_0(h, h', k).$$

The estimation of the sum (2) enable us to state the following theorem:

For given $k \geqslant 1$ and $h > 1$ (k is integral) we can choose $h_0 = h_0(h, k)$ such that for every α of the form

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}; \quad (a, q) = 1; \quad n^{h_0} \leqslant q \leqslant \tau; \quad \tau = N^k n^{-h_0}$$

and for any ν satisfying the condition

$$0 < \nu \leqslant 1$$

the number U of terms of the sequence

$$\{\alpha p^k\}; \quad p \leqslant N$$

not exceeding ν is expressed by the formula

$$U = \nu\pi(N) + O(Nn^{-h}).$$

V. Stekloff Institute of Mathematics.
Academy of Sciences of the USSR.
Moscow.

Received
2. VII. 1937.

REFERENCES

I. M. Vinogradow, C. R. Acad. Sci. URSS, XV, № 6—7 (1937).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

MATHEMATIK

ÜBER DIE AUFLÖSUNG DER INTEGRALGLEICHUNG VON N. MOISSEIEV IN DER THEORIE DER NICHTREGULARISIERTEN GEOIDFIGUR

Von B. SALTYKOV

(Vorgelegt von V. G. Fessenkov, Mitglied der Akademie, d. 7. VI. 1937)

In einer der vorhergehenden Arbeiten von N. Moisseiev (1) in der zum ersten Male das Problem der Bestimmung der Figur des Geoides einer nichtregularisierten Erde aufgestellt worden ist, wurde unter anderem folgende Integralgleichung abgeleitet:

$$\zeta = c + \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1} S_\Delta d\sigma_1 + \frac{k^2 R}{3\gamma}\int_{\Sigma_1} \zeta \cdot S_\mu d\sigma_1, \qquad (1)$$

wo ζ die gesuchte Abweichung des Geoids von der Referenzsphäre bedeutet und c eine konstante Grösse ist, während die Hilfsfunktionen S_Δ und S_μ durch folgende Formeln gegeben sind:

$$S_\Delta = -\Delta^F\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - \ln\left(1+\sin\frac{\psi}{2}\right)\right] - \Delta^P \ln\sin\frac{\psi}{2}$$

$$S_\mu = 2\bar{\mu}\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - \ln\left(1+\sin\frac{\psi}{2}\right)\right] + [2\bar{\mu} - 3\mu(\varepsilon)]\ln\sin\frac{\psi}{2}.$$

Im vorliegenden Artikel wollen wir uns mit der Auflösung der Gleichung (1) beschäftigen.

Es sei:

k^2 — die Gravitationskonstante,
$\bar{\mu}$ — die mittlere Dichte der Erde,
$\mu(\varepsilon)$ — die mittlere Dichte der oberen Erdschichten,
$\sum_1$ — die Einheitssphäre,
$\sum_R$ — die Referenzsphäre mit dem Halbmesser R,
$d\sigma_1$ — das Oberflächenelement der Einheitssphäre $\sum_1$,
ζ — die Abweichung des Geoids von der Referenzsphäre $\sum_R$,
ψ — der Winkel der von den Radien-Vektoren des Punktes, in welchem ζ bestimmt wird, und des Laufpunktes auf der Oberfläche $\sum_R$ gebildet ist,
$P_n(\psi)$ — Legendrescher Polynom n-ter Ordnung,
$(-\gamma)$ — Radial-gradient des Anziehungspotentials* der Massen der normalen Erde, für die Punkte der Referenzsphäre berechnet,

* Statt des Anziehungspotentials kann man immer das Schwerepotential einführen, was keine Änderungen der Gestalt der Gleichung (1) mit sich bringt.

Δ^P — die Anomalie von Prey des Radialgradienten des Anziehungspotentials der wahren Erde,
Δ^B — die Bouguersche Anomalie desselben Gradienten, und endlich,
Δ^F — die Fayesche Anomalie desselben Gradienten, die mit den zwei vorhergehenden Anomalien durch die Formel $\Delta^F = 2\,\Delta^B - \Delta^P$ verbunden ist.

Ersetzen wir in den Koeffizienten bei ζ in der Gleichung (1) γ durch den Ausdruck

$$\gamma = \frac{4}{3}\pi k^2 \bar{\mu} R \tag{2}$$

und machen von den Formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} P_n(\psi) + 2 = \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\psi) + 1 = \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - \ln\left(1 + \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}\right)$$

Gebrauch, so bekommen wir die Möglichkeit, der Gleichung (1) folgende Form zu geben:

$$\zeta = c_1 - \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1} \Delta^F \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\psi)\, d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1} (\Delta^P - \Delta^B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\psi)\, d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{3}{8\pi}\mu' \int_{\Sigma_1} \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\psi)\, d\sigma_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\psi)\, d\sigma_1, \tag{3}$$

wo c_1 eine Konstante ist und $\mu' = \frac{\mu(\varepsilon)}{\bar{\mu}}$ ist.

Es seien

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n, \quad \Delta^F = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^F, \quad (\Delta^P - \Delta^B) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^P - \Delta^B)_n \tag{4}$$

die Entwicklungen der angegebenen Grössen nach Kugelfunktionen. Wenn wir mit S_m eine dieser drei Grössen ζ_m, Δ_n^F, oder $(\Delta^P - \Delta^B)_n$ bezeichnen, so können wir folgende bekannte Beziehungen schreiben:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Sigma_1} S_m \cdot P_n(\psi)\, d\sigma_1 = \int_{\Sigma_1} S_n \cdot P_n(\psi)\, d\sigma_1 = \frac{4\pi}{2n+1} S_n. \tag{5}$$

Danach können wir der Gleichung (3) folgende Form geben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n + \zeta_0 = c_1 - \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n+1} \Delta_n^F + \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n(n+1)} (\Delta^P - \Delta^B)_n +$$

$$+ \frac{3}{8\pi}\mu' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n(n+1)} \zeta_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \zeta_n, \tag{6}$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-2n-3\mu'}{2n(n+1)}\zeta_n + \zeta_0 = c_1 - \frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n+1}\Delta_n^F +$$

$$+\frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n(n+1)}(\Delta^P-\Delta^B)_n.$$

Machen wir noch einmal von der Formel (5) Gebrauch, so bekommen wir aus der letzten Gleichung:

$$\zeta_0 = c_1 \tag{7}$$

und für $n \neq 0$:

$$\frac{2n^2-2n-3\mu'}{2n(n+1)}\zeta_n = -\frac{R}{\gamma}\frac{1}{n+1}\Delta_n^F + \frac{R}{\gamma}\frac{1}{n(n+1)}(\Delta^P-\Delta^B)_n.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass für $n=1$ $(\mu' \neq 0)$

$$\zeta_1 = \frac{2}{3}\frac{R}{\gamma\mu'}[\Delta_1^F - (\Delta^P-\Delta^B)_1], \tag{8}$$

und für $n \neq 0$, $n \neq 1$

$$\zeta_n = -\frac{R}{2\pi\gamma}\frac{4\pi n}{2n^2-2n-3\mu'}\Delta_n^F + \frac{R}{2\pi\gamma}\frac{4\pi}{2n^2-2n-3\mu'}(\Delta^P-\Delta^B)_n. \tag{9}$$

Nehmen wir in Betracht die Gleichungen (4), (7) und (8), so erhalten wir aus (9) mit Hilfe der Formel (5) folgende Formel:

$$\zeta = c_1 + \frac{R}{2\mu'\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}\Delta^F\cos\,d\sigma_1 - \frac{R}{2\mu'\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}(\Delta^P-\Delta^B)\cos\psi\,d\sigma_1 -$$

$$-\frac{R}{2\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}\Delta^F\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(2n+1)}{2n^2-2n-3\mu'}P_n(\psi)\,d\sigma_1 +$$

$$+\frac{R}{2\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}(\Delta^P-\Delta^B)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{2n^2-2n-3\mu'}P_n(\psi)\,d\sigma_1, \tag{10}$$

die gerade die gesuchte Lösung der Integralgleichung von N. Moisseiev darstellt.

Um diese Lösung in einer bequemeren Form zu erhalten, brauchen wir die geschlossenen Ausdrücke, der in (10) auftretenden Summen. Dazu schreiben wir die genannten Summen folgendermassen:

$$\Psi_1(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(2n+1)}{2n^2-2n-3\mu'}P_n(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty}P_n(\psi) +$$

$$+A\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-a}P_n(\psi) + B\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-b}P_n(\psi), \tag{11}$$

$$\Psi_2(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{2n^2-2n-3\mu'}P_n(\psi) =$$

$$= A'\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-a}P_n(\psi) + B'\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-b}P_n(\psi), \tag{12}$$

wo A, B, A' und B' Konstanten sind, die bei der Partialbruchzerlegung der rationalen Brüche

$$\frac{n(2n+1)}{2n^2-2n-3\mu'} \quad \text{und} \quad \frac{2n+1}{2n^2-2n-3\mu'}$$

auftreten, und wo

$$a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+6\mu'}),\ b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+6\mu'})$$

die Wurzeln des Nenners dieser Brüche sind.

Nun ist die erste Summe in der rechten Seite von (11) gleich:

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n(\psi)=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}-1-\cos\psi,$$

während die zwei übrigen in der Form

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-a}P_n(\psi)&=\int_{u=0}^{1}\frac{1}{u^a}\left[\frac{1}{u\sqrt{1-2u\cos\psi+u^2}}-\frac{1}{u}-\cos\psi\right]du,\\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-b}P_n(\psi)&=\int_{u=0}^{1}\frac{1}{u^b}\left[\frac{1}{u\sqrt{1-2u\cos\psi+u^2}}-\frac{1}{u}-\cos\psi\right]du\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

dargestellt werden können.

Die Integrale, die in den rechten Seiten von (13) vorkommen, können für jeden gegebenen μ'-Wert mit erwünschter Genauigkeit berechnet werden. Also ist es möglich, auch die Funktionen $\Psi_1(\psi)$ und $\Psi_2(\psi)$ mit beliebiger Genauigkeit zu tabellarisieren. Es ist zu bemerken, dass die Integrale in den rechten Seiten von (13) immer konvergent sind, wenn μ' in den Grenzen $-\frac{1}{6}<\mu'<\frac{4}{3}$ bleibt. In unserer Aufgabe haben wir $\mu'\approx\frac{1}{2}$.

Kehren wir zur Formel (10) zurück, so können wir diese in folgender endgültigen Form schreiben:

$$\zeta=c_1+\frac{R}{2\mu'\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}(\Delta^F-\Delta^P+\Delta^B)\cos\psi\,d\sigma_1-$$
$$-\frac{R}{2\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}\Delta^F\Psi_1(\psi)\,d\sigma_1+\frac{R}{2\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}(\Delta^P-\Delta^B)\Psi_2(\psi)\,d\sigma_1.\quad(14)$$

Im Falle des Fehlens der äusseren störenden Massen, d. h. im Falle, wo $\mu'=0$, $\Delta^P-\Delta^B=0$ ist, geht die Formel (14) mit der Nebenbedingung

$$\int_{\Sigma_1}\Delta^F\cos\psi\,d\sigma_1=0\quad(15)$$

in die bekannte Stokessche Formel über. Aus diesser Bemerkung folgt, dass die Stokessche Theorie als eine spezielle Art der Theorie des Geoids von Moisseiev angesehen werden kann, in die die letztgenannte entartet, wenn wir von der nichtregularisierten Erde von Moisseiev zur regularisierten Erde von Stokes übergehen. Was die Nebenbedingung (15) anbetrifft, so ist diese bekanntlich auch bei der Ableitung der Stokesschen Formel nach anderen Methoden notwendig. Für praktische Zwecke scheint uns nicht von geringem Interesse der Spezialfall zu sein, wo μ'

gleich $\frac{1}{2}$ gesetzt werden kann. In diesem Falle nimmt die Formel (14) folgende Gestalt an:

$$\zeta = c_1 - \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1} \Delta^F \Phi_1(\psi)\, d\sigma_1 + \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1} (\Delta^P - \Delta^B)\, \Phi_2(\psi)\, d\sigma_1,$$

wo die Hilfsfunktionen $\Phi_1(\psi)$ und $\Phi_2(\psi)$ durch die elliptischen Integrale

$$K = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}, \quad E = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

deren Modul $\varkappa^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\psi)$ ist, folgendermassen ausgedrückt werden können:

$$\Phi_1(\psi) = \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - 4(2\cos\psi + 1)\sin\frac{\psi}{2} + (4\cos\psi - 1)K - 8\cos\psi E,$$

$$\Phi_2(\psi) = \frac{2}{3}\left[2 - 4(2\cos\psi + 1)\sin\frac{\psi}{2} + (4\cos\psi - 1)K - 8\cos\psi E\right].$$

Zum Schluss geben wir eine Tabelle der Zahlenwerte der Funktionen $\Phi_1(\psi)\sin\psi$ und $\Phi_2(\psi)\sin\psi$.

ψ	$\Phi_1(\psi)\sin\psi$	$\Phi_2(\psi)\sin\psi$	ψ	$\Phi_1(\psi)\sin\psi$	$\Phi_2(\psi)\sin\psi$	ψ	$\Phi_1(\psi)\sin\psi$	$\Phi_2(\psi)\sin\psi$
0°	2.00	0.00	60°	— 4.06	— 2.71	120°	1.70	1.62
5	2.43	0.40	65	— 4.38	— 2.84	125	2.35	2.10
10	2.38	0.49	70	— 4.52	— 2.86	130	2.95	2.48
15	2.08	0.41	75	— 4.49	— 2.76	135	3.47	2.75
20	1.59	0.20	80	— 4.25	— 2.54	140	3.74	2.89
25	1.00	— 0.10	85	— 3.84	— 2.21	145	3.82	2.91
30	0.20	— 0.49	90	— 3.27	— 1.79	150	3.71	2.80
35	— 0.61	— 0.91	95	— 2.57	— 1.28	155	3.42	2.56
40	— 1.44	— 1.35	100	— 1.76	— 0.72	160	2.96	2.20
45	— 2.37	— 1.77	105	— 0.89	— 0.12	165	2.36	1.74
50	— 2.95	— 2.16	110	0.00	0.49	170	1.64	1.22
55	— 3.58	— 2.42	115	0.88	1.08	175	0.84	0.62
						180	0.00	0.00

Sternbergsches Astronomisches Institut.
Moskau.

Eingegangen
d. 7. VI. 1937.

ZITIERTE LITERATUR

[1] N. Moisseiev, Gerlands Beiträge zur Geophysik, 42, H. 2-3 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3.

MATHEMATIK

ÜBER DIE QUASI-STOKESSCHE FORM DER INTEGRALGLEICHUNG VON N. MOISSEIEV FÜR DAS NICHTREGULARISIERTE GEOID

Von B. SALTYKOV

(Vorgelegt von V. G. Fessenkov, Mitglied der Akademie, d. 7. VI. 1937)

In dem vorliegenden Aufsatz geben wir eine Transformation der Integralgleichung von Prof. N. Moisseiev (1)

$$\zeta = c + \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1} S_\Delta \, d\sigma_1 + \frac{k^2 R}{3\gamma}\int_{\Sigma_1} \zeta \cdot S_\mu \, d\sigma_1, \qquad (1)$$

die die Figur der nichtregularisierten Geoids bestimmt, in einer neuen Form an*. Diese von uns erhaltene neue Form der Gleichung (1) ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass in ihr die Glieder, welche in der bekannten Formel von Stokes auftreten, explizite vorkommen, was uns die Möglichkeit gibt, die übrigen Glieder auszusondern, die von dem Unterschied der beiden Schemen abhängen.

In einem der vorhergehenden Aufsätze (2) haben wir gezeigt, dass die Gleichung (1) immer in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n + \zeta_0 = c_1 - \frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n+1}\Delta_n^F + \frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n(n+1)}(\Delta^P - \Delta^B)_n + \\ + \frac{3}{8\pi}\mu'\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n(n+1)}\zeta_n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\zeta_n \qquad (2)$$

geschrieben werden kann, wo $\mu' = \frac{\mu(\varepsilon)}{\mu}$ ist.

Daraus erhalten wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}\zeta_n + \zeta_0 = c_1 - \frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n+1}\Delta_n^F + \frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n(n+1)}(\Delta^P - \Delta^B)_n + \\ + \frac{3}{8\pi}\mu'\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n(n+1)}\zeta_n. \qquad (3)$$

Der bekannten Eigenschaft der Kugelfunktionen zufolge erhalten wir weiter:

---

* Die hier angewandten Symbole sind dieselben wie im voranstehenden Aufsatz, siehe S. 133

für $n=0$, $\zeta_0 = c_1$; (4)

für $n=1$, $\zeta_1 = \frac{2}{3}\frac{R}{\gamma\mu'}[\Delta_1^F - (\Delta^P - \Delta^B)_1]$ (5)

und für $n \neq 0$, $n \neq 1$

$$\zeta_n = -\frac{R}{4\pi\gamma}\frac{4\pi}{n-1}\Delta_n^F + \frac{R}{4\pi\gamma}\frac{4\pi}{n(n-1)}(\Delta^P - \Delta^B)_n + \frac{3}{8\pi}\mu'\frac{4\pi}{n(n-1)}\zeta_n. \quad (6)$$

Nehmen wir in Betracht die Gleichungen:

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\zeta_n, \quad \Delta^F = \sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n^F, \quad (\Delta^P - \Delta^B) = \sum_{n=0}^{\infty}(\Delta^P - \Delta^B)_n,$$

sowie auch die Formeln (4), (5) und (6), so erhalten wir, der erwähnten Eigenschaft der Kugelfunktionen zufolge, folgende Form der ursprünglichen Gleichung (1):

$$\zeta = c_1 - \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}\Delta^F \cdot S(\psi)\,d\sigma_1 + \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}(\Delta^P - \Delta^B)\cdot F_1(\psi)\,d\sigma_1 +$$
$$+\frac{3}{8\pi}\mu'\int_{\Sigma_1}\zeta \cdot F_1(\psi)\,d\sigma_1 + \frac{3}{4\pi}\int_{\Sigma_1}\zeta\cos\psi\,d\sigma_1, \quad (7)$$

wo $S(\psi)$ die bekannte Funktion von Stokes ist und wo die zweite Hilfsfunktion $F_1(\psi)$ durch die Formel gegeben ist:

$$F_1(\psi) = (1-3\cos\psi)\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) - 6\sin\frac{\psi}{2} - 2\cos\psi + 3.$$

Hier geben wir die Tabelle der Zahlenwerte der Funktion $F_1(\psi)\sin\psi$.

ψ	$F_1(\psi)\sin\psi$	ψ	$F_1(\psi)\sin\psi$	ψ	$F_1(\psi)\sin\psi$	ψ	$F_1(\psi)\sin\psi$	ψ	$F_1(\psi)\sin\psi$
0°	0.00	40°	0.27	80°	−1.16	120°	0.00	160	0.52
5	0.60	45	0.00	85	−1.15	125	0.19	165	0.42
10	0.89	50	−0.27	90	−1.08	130	0.34	170	0.30
15	1.04	55	−0.52	95	−0.93	135	0.47	175	0.15
20	1.02	60	−0.74	100	−0.78	140	0.56	180	0.00
25	0.92	65	−0.92	105	−0.60	145	0.61		
30	0.75	70	−1.06	110	−0.40	150	0.62		
35	0.53	75	−1.13	115	−0.19	155	0.59		

Die obenerhaltene Form (7) der Moisseievschen Gleichung nennen wir die «quasi-Stokessche Form» derselben.

Das erste Glied der rechten Seite von (7) ist eine gewisse Konstante. Das zweite Glied ist mit der rechten Seite der Stokesschen Formel identisch. Was aber die zwei übrigen Glieder anbetrifft, so drükken sie offenbar den Einfluss aus, der von den äusseren in bezug auf die Referenzsphäre störenden Massen verursacht wird. Um diese letztere Bemerkung zu vervollständigen, wollen wir eine Transformation der zwei letzten Glieder in der rechten Seite von (7) ausführen. Nehmen wir nämlich die bekannte, bis zu Grössen von der Ordnung $\frac{H^2}{R}$ exklusive genaue Formel*

$$\Delta^P - \Delta^B = 2\pi k^2 \mu(\varepsilon) H$$

und ersetzen wir zugleich γ in dem Koeffizienten bei ζ durch den Ausdruck

* H = Höhe des Punktes auf der physikalischen Erdoberfläche über dem Meeresniveau.

$$\gamma = \frac{4}{3}\pi k^2 \bar{\mu} R,$$

so erhalten wir für die Summe der zwei obengenannten Zusatzglieder folgende Formel:

$$\frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}(\Delta^P - \Delta^B)F_1(\psi)\,d\sigma_1 + \frac{3}{8\pi}\mu'\int_{\Sigma_1}\zeta F_1(\psi)\,d\sigma_1 =$$
$$= \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1} 2\pi k^2 \mu(\varepsilon)(H+\zeta)F_1(\psi)\,d\sigma_1.$$

Was aber die Grösse $2\pi k^2\mu(\varepsilon)(H+\zeta)$ anbetrifft, so lässt sie sich als die Anziehung interpretieren, die von der zwischen dem Beobachtungsort und der Referenzsphäre liegenden flachen Erdschicht ausgeübt wird.

Für den Fall der regularisierten Erde $\mu' = 0$ nimmt die Formel (7) folgende Gestalt

$$\zeta = c_1 - \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}\Delta^F S(\psi)\,d\sigma_1 + \frac{3}{4\pi\gamma}\int_{\Sigma_1}\zeta\cos\psi\, d\sigma_1 \qquad (9)$$

an. Wenn wir aber den Schwerpunkt der Erde mit dem Mittelpunkt der Referenzsphäre zusammenfallen lassen, so verschwindet das letzte Glied in der rechten Seite der Formel (9), und die Formel (9) geht in nichts anderes als in die Stokessche Formel über.

Sternbergsches Astronomisches
Institut. Moskau.

Eingegangen
d. 7. VI. 1937.

ZITIERTE LITERATUR

[1] N. Moisseiev, Gerlands Beiträge zur Geophysik, **42**, H. 2-3 (1934).
[2] B. Saltykov, C. R. Acad. Sci. URSS, XVI, № 3 (1937).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

MATHÉMATIQUES

SUR L'UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE NEUMANN

Par M. KELDYŠ (KELDYSCH) et M. LAVRENTIEV

(Présenté par I. M. Vinogradow, de l'Académie, le 7. VI. 1937)

Dans sa monographie sur la théorie du potentiel newtonien N. Gunther a signalé le fait que l'on ne sait pas jusqu'à présent si dans le cas d'un domaine limité par une surface vérifiant les conditions de Liapounoff la solution du problème de Neumann est unique (1). Dans cette note nous allons exposer une méthode géométrique simple, qui permet de démontrer l'unicité de la solution du problème de Neumann pour une classe de domaines, contenant tous les domaines limités par des surfaces de Liapounoff.

Désignons par $T(\alpha, k, h)$ le corps de révolution, limité par la surface $z = k(x^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ $(k > 0,\ \alpha > 0)$ et par le plan $z = h$ $(h > 0)$; le point $(0, 0, 0)$ de ce corps sera appelé le sommet du corps, et la partie de la frontière de T, située dans le plan $z = h$ sera appelée la base du corps.

Nous dirons qu'un domaine simplement connexe D appartient à la classe A si, quel que soit le point P de la frontière du domaine D, on peut construire un corps T', congruent à un corps $T(\alpha, k, h)$, contenu dans le domaine fermé $\overline{D}$ et dont le sommet coïncide avec le point P.

Dans le cas où l'on peut construire les corps T' d'une telle manière que les nombres α, k, h ne dépendent pas de la position du point P sur la frontière de D, nous dirons que le domaine D appartient à la classe $B(\alpha, k, h)$.

Il est évident que l'ensemble de tous les domaines de la classe A contient tous les domaines limités par des surfaces de Liapounoff.

Théorème 1. *Soit U une fonction harmonique, définie et régulière dans un domaine D, est qui n'est pas une constante. Supposons qu'en un point P_0 de la frontière de D la fonction U a une valeur limite unique U_0 qui coïncide avec la borne inférieure de U dans le domaine D. Alors, s'il existe un corps T' congruent à T contenu dans D et dont le sommet coïncide avec le point P_0, on a l'inégalité suivante:*

$$\liminf_{P \to P_0} \frac{U(P) - U(P_0)}{\overline{PP_0}} > 0,$$

P étant situé sur l'axe du corps T'.

En effet, désignons par σ la frontière du corps, par σ' la base de T', et soit σ'' la partie de σ complémentaire à σ'. Soit U_1 la valeur mini-

male de U sur σ', $U_1 > U_0$. Construisons dans T' une fonction harmonique V dont les valeurs limites sont égales à U_1 sur σ' et à U_0 sur σ''. D'après le principe de maximum, à l'intérieur de T on a $V < U$ et, par conséquent,

$$\liminf_{P \to P_0} \frac{U(P) - U(P_0)}{\overline{PP_0}} > \lim_{P \to P_0} \frac{V(P) - V(P_0)}{\overline{PP_0}}. \qquad (1)$$

En utilisant l'inégalité (1) et le principe de maximum, on s'assure aisément que pour démontrer le théorème énoncé il suffit de construire une fonction harmonique W définie dans le domaine $T(\alpha, k, h)$ et vérifiant les conditions suivantes: 1) $W = 0$ au sommet du corps T; 2) les valeurs limites de W sur la surface latérale de T sont négatives ou nulles; 3) $\frac{\partial W}{\partial z} > 0$ au sommet du corps T. D'ailleurs, il est évident qu'il suffit de construire une telle fonction pour une valeur assez petite de h. En désignant par r le rayon-vecteur du point (x, y, z) et par θ l'angle de ce rayon avec l'axe z, nous posons

$$W = r\cos\theta + \lambda r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos\theta), \qquad (2)$$

$P_{1+\beta}(t)$ étant la solution de l'équation de Legendre d'ordre $1+\beta$, régulière et se réduisant à l'unité pour $t = 1$. Si le nombre h est assez petit, on peut choisir deux nombres positifs λ et β d'une telle manière que la fonction W satisfasse à toutes les conditions précédemment indiquées.

Du théorème démontré on déduit immédiatement les résultats suivants:

Théorème 2. *Il n'existe pas de fonction harmonique, définie et régulière dans un domaine D, de la classe A, continue dans le domaine fermé $\overline{D}$, qui n'est pas une constante et dont la dérivée normale à la frontière de D est nulle.*

Théorème 3. *Soit U une fonction harmonique, continue dans le domaine fermé $\overline{D}$ de la classe $B(\alpha, k, h)$ et satisfaisant à la condition*

$$\frac{dU}{dn} > 0,$$

dn étant l'élément de la normale à la frontière de D. Dans ce cas la fonction U est une constante à $Kd\varepsilon$ près, d étant le diamètre de D et le nombre K ne dépendant que de α, k et h.

Institut Mathématique V. Stekloff,
Académie des Sciences de l'URSS.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 7. VI. 1937.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Gunther, La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique, Paris, p. 97 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

MATHEMATIK

ÜBER DIE GRUPPE DER ANALYTISCHEN BEWEGUNGEN DER INVARIANTEN BEI PSEUDOKONFORMEN ABBILDUNGEN GEOMETRIE

Von B. FUCHS

(Vorgelegt von I. M. Vinogradow, Mitglied der Akademie d. 14. VI. 1937)

1. Es sei $\mathfrak{B}$ ein schlichtes Gebiet des Raumes von n komplexen Veränderlichen $z^1, z^2, \ldots, z^n$ $(z^k = x^k + iy^k)$.

Nach Bergmann (1) kann man (im Zusammenhange mit gewissen Minimalaufgaben) die s. g. Kernfunktion $K(z, \bar{z}) = K(z_1, \ldots, z^n, \bar{z^1}, \ldots, \bar{z^n})$ des Gebietes $\mathfrak{B}$ einführen, und mit ihrer Hilfe eine, gegenüber pseudokonformen Abbildungen invariante Metrik:

$$ds^2 = T_{m\bar{k}}\, dz^m\, \overline{dz^k}; \quad T_{m\bar{k}} = \frac{\partial^2 \lg K}{\partial z^m\, \partial \bar{z^k}} \tag{1}$$

aufstellen (1). [(1) stellt eine positiv definite, Hermitesche Form dar; unter einer pseudokonformen Abbildung versteht man eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}$ durch n in $\mathfrak{B}$ a. F. v. n k. V. (analytische Funktionen von n komplexen Veränderlichen)].

Wir werden die Gruppe von analytischen Bewegungen der invarianten Geometrie (1) betrachten. Diese Gruppe werden wir durch ihre infinitesimalen Transformationen

$$Xf = \xi^k \frac{\partial f}{\partial z^k} + \overline{\xi^k}\, \frac{\partial f}{\partial \bar{z^k}}; \quad \delta z^k = \xi^k(z)\delta p \tag{2}$$

angeben, worin $\xi^k(z) \equiv \xi^k(z^1, \ldots, z^n)$ a. F. $z^1, \ldots, z^n$ bedeuten, p ist ein reeller Parameter.

Die Gleichungen von Killing [sie besagen, dass $\delta(ds^2) = 0$] haben in diesem Falle die Gestalt:

$$\frac{\partial \xi_{\bar{k}}}{\partial z^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial \bar{z^k}} = 2Re\left(\frac{\partial \xi_{\bar{k}}}{\partial z^i}\right) = 0 \tag{3}$$

$(\xi_s = T_{s\bar{k}}\, \overline{\xi^k}; \ \xi_{\bar{s}} = T_{k\bar{s}}\, \xi^k)$. In einer früheren Arbeit (2) habe ich folgende zwei Sätze bewiesen:

Satz 1. *Damit Xf zur Gruppe der analytischen Bewegungen der invarianten Geometrie (1) gehört, ist es notwendig und hinreichend, dass $X[\lg K]$ den Realteil einer a. F. v. n k. V. darstellt.*

Satz 2. *Gehört Xf zur Gruppe der analytischen Bewegungen der invarianten Geometrie (1), dann gilt*

$$\xi^p(z) = \alpha^s \tau^{p\bar{e}} T^{(P)}_{s\bar{e}} - \overline{\alpha^s} \tau^{p\bar{e}} \frac{\partial^2 \lg M(z, \bar{t})}{\partial t^s \partial \overline{t^e}} - \overline{\beta^s_e} \tau^{p\bar{e}} \frac{\partial \lg M(z, \bar{t})}{\partial t^s}. \qquad (4)$$

Hier sind $\alpha^s = \xi^s(t)$, $\beta^s_e = \frac{\partial \overline{\xi^s(t)}}{\partial t^e}$ gewisse Konstanten, $P(t^1, \ldots, t^n)$ ist ein fixierter Punkt von $\mathfrak{B}$; $\tau^{p\bar{e}} = T^{p\bar{e}}(z, \bar{t})$.

$M(z, \bar{t})$ ist die [von Bergmann eingeführte (1)] Minimalfunktion von $\mathfrak{B}$. Der Index (P) weist darauf hin, dass der Wert der betreffenden Grösse im Punkte P genommen wird.

2. Aus den Sätzen 1 und 2 ausgehend, kann man Kriterien für die Existenz einer m-gliedrigen Gruppe von Bewegungen und ihrer Untergruppen erhalten. Aus (4) folgt

$$\xi^{\bar{r}} = Q^{\bar{e}}_{\bar{r}} \left(\gamma_{\bar{e}} - U^q_{\bar{e}} \gamma_q - i \delta_{q\bar{e}} U^q \right), \qquad (5)$$

worin $Q^{\bar{e}}_{\bar{r}} = T_{s\bar{r}} \tau^{s\bar{e}}$ bedeutet. (Bei einer Koordinatentransformation gilt $Q^{*\bar{a}}_{\bar{b}} = Q^{\bar{e}}_{\bar{r}} \frac{\partial \overline{z^r}}{\partial \overline{z^{*b}}} \frac{\partial \overline{t^{*a}}}{\partial \overline{t^e}}$). Die

$$U^q = T^{q\bar{r}}_{(P)} \frac{\partial \lg M(z, \bar{t})}{\partial \overline{t^r}}$$

bilden in $\mathfrak{B}$ die s. g. repräsentativen Koordinaten bezüglich des Punktes P; $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ , & \end{smallmatrix}\right) U^q_{\bar{e}} = \frac{\partial U^q(z, \bar{t})}{\partial \overline{t^e}}$; $\gamma_q = \pi_q - i\rho_q$ $(\gamma_{\bar{q}} = \overline{\gamma_q})$; $\pi_q, \rho_q, \delta_{q\bar{e}}$ sind reelle Konstanten.

Der Fall, wo alle π_q, ρ_q, $\delta_{q\bar{e}}$ unabhängige, wesentliche Parameter sind, entspricht der Hyper-Kugel $\left(\sum_{k=1}^{h} z^k \overline{z^k} < 1\right)$, d. h. einem Raum von konstanter, unitärer Krümmung. Für den allgemeinen Fall erhalten wir den folgenden

Satz 3. *Damit eine analytische Bewegungsgruppe der invarianten Geometrie (1) existiere, ist es notwendig und hinreichend, dass für alle Werte k, r die Grössen:*

$$Re \frac{\partial}{\partial z^k} \left(Q^{\bar{q}}_{\bar{r}} - Q^{\bar{e}}_{\bar{r}} U^q_{\bar{e}} \right); \quad Re \left[i \frac{\partial}{\partial z^k} \left(Q^{\bar{q}}_{\bar{r}} + Q^{\bar{e}}_{\bar{r}} U^q_{\bar{e}} \right) \right]; \quad Re \left[i \frac{\partial}{\partial z^k} Q^{\bar{e}}_{\bar{r}} U^q \right], \qquad (6)$$

durch gleiche Linearbeziehungen mit konstanten Koeffizienten verbunden seien. Die Anzahl m solcher voneinander unabhängigen Linearbeziehungen ist der Anzahl der Parameter der Gruppe gleich. Es ist $m = n(n+2) - p$, wo p der Rang einer Matrix Δ ist. Die Elemente der letzteren hängen nur von der Kernfunktion von $\mathfrak{B}$ und deren Ableitungen ab.

Die Kolonnen von Δ bilden die Ausdrücke (6) und deren Ableitungen nach z^k, $\overline{z^k}$ bis zur $[n(n+2) - 1]$-ten Ordnung. Jeden Werten von k, r und jeder Art der Ableitung entspricht eine Kolonne von Δ.

Ein analoges Ergebnis erhält man für die «Untergruppe der Stabilität des Punktes P» (die Untergruppe der analytischen Bewegungsgruppe mit dem Fixpunkt in P).

Satz 4. *Damit eine Untergruppe der Stabilität des Punktes P existiere, ist es notwendig und hinreichend, dass die Grössen $Re\left(i \frac{\partial}{\partial z^k} Q^{\bar{e}}_{\bar{r}} U^q \right)$ für alle k, r durch die gleiche Linearbeziehungen mit konstanten Koef-*

fizienten verbunden seien. Die Anzahl m solcher Linearbeziehungen ist der Anzahl der Parameter dieser Untergruppe gleich. Es ist $m = n^2 - p$, *wo p der Rang einer Matrix* Δ_1 *bedeutet, deren Elemente aus* $Re\left(i\frac{\partial}{\partial z^k}Q^e_{\bar{r}}U^q\right)$ *(analog, wie die von* Δ*) gebildet werden.*

Durch Nullsetzen der Minoren entsprechender Ordnung von Δ_1 erhält man ein System von algebraischen Gleichungen zur Bestimmung der Punkte zu denen Stabilitätsuntergruppen gehören. Da die Elemente Δ_1 ausser t^k noch von z^k abhängen, die bei der Lösung dieser Gleichungen wegfallen müssen, sehen wir, dass der Fall der Existenz von Punkten die Stabilitätsuntergruppen besitzen als ein Ausnahmefall zu betrachten ist.

3. Wir wollen nunmehr den Satz 1 zur Aufzählung der möglichen analytischen Bewegungsgruppen und zur Aufstellung der entsprechenden Typen von $K(z, \bar{z})$ heranziehen. Wir werden uns dabei auf den Fall der Bereiche im Raume z^1, z^2 beschränken. Der Unterschied zwischen unseren Betrachtungen und den klassischen Ergebnissen von Bianchi (5) und Fubini (6) besteht im folgenden:

1) Zwei Gruppen, die vermittels einer Transformation im Raume x^1, y^1, x^2, y^2 ineinander übergehen, brauchen nicht notwendigerweise durch ein Paar v. a. F. v. 2 k. V, ineinander überführbar zu sein. Dies findet eine geometrische Interpretation darin, dass zwei Vektoren, die in einer analytischen Ebene liegen, dürfen, in unserem Falle, nicht als die Axen $Re(z^1)$, $Re(z^2)$ gewählt werden.

2) Wir haben mit einer Riemannschen Geometrie (1) spezieller Art zu tun.

Auf Grund der Rechnungen haben wir die folgenden Typen der möglichen Gruppen und folgende ihnen entsprechende Werte für die Kernfunktion erhalten *.

Fall der eingliedrigen Gruppe:

$$Xf = 2Re\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right); \quad \lg K = \chi + \bar{\chi} + \Phi(y_1, x_2, y_2).$$

Fall der zweigliedrigen Gruppe:

I, $X_1 f = 2Re\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$; $X_2 f = 2Re\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)$; $\lg K = \chi + \bar{\chi} + \Phi(y_1, y_2)$.

II, $X_1 f = 2Re\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$; $X_2 f = 2Re\left(z_2\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$;

$$\lg K = \chi + \bar{\chi} + \frac{ay_1^2 + \psi(x_2, y_2)\, y_1}{y_2} + \Phi(x_2, y_2), \quad \Delta\psi = 0.$$

III, $X_1 f = 2Re\left(e^{-z_2}\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$; $X_2 f = 2Re\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)$;

$$\lg K = \chi + \bar{\chi} + \Phi(z_1 e^{iy_2} - \bar{z}_1 e^{-iy_2}, y_2).$$

IV, $X_1 f = 2Re\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$; $X_2 f = 2Re\left(z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$;

$$\lg K = \chi + \bar{\chi} + \psi(x_2, y_2)\lg y_1 + \Phi(x_2, y_2), \quad \Delta\psi = 0.$$

---

* Die Ausdrücke Xf, $\lg K$ werden in Koordinaten aufgeschrieben, die auf die entsprechende Weise in der Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{B}$ bestimmt sind. Die Indices werden unten geschrieben. f bedeutet für alle Xf eine reelle Funktion.

Fall der dreigliedrigen Gruppe *:

1) I, $X_3 f = 2Re\left(i\frac{\partial f}{\partial z_1} + i\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)$; $\lg K = \chi + \bar{\chi} + \frac{(ay_1 + by_2)^2}{a+b} + \Phi(y_2 - y_1)$.

2) I, $X_3 f = 2Re\left(z_2\frac{\partial f}{\partial z_1} + i\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)$; $\lg K = \chi + \bar{\chi} - \frac{ay_2^3}{3} + ay_1y_2 + \Phi(y_2^2 - 2y_1)$.

3) II, $X_3 f = 2Re\left(\eta'(z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_2}\right)$; $\lg K = \chi + \bar{\chi} + \frac{ay_1^3}{2} - \frac{ai(\eta - \bar{\eta})y_1}{y_2} +$

$$+ \frac{cy_1}{y_2} - \frac{a(\eta - \bar{\eta})^2}{4y_2} + \frac{bx_2(\eta - \bar{\eta})i}{2y_2} + bx_2y_1 + \frac{ci(\eta - \bar{\eta})}{2y_2} + \Phi(y_2).$$

4) I, $X_3 f = 2Re\left(z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + i\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)$; $\lg K + \chi + \bar{\chi} + by_2^2 + \Phi(y_1 e^{-y_2}]$.

5) I, $X_3 f = 2Re\left[(z_1 + z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial z_2}\right]$; $\lg K = \chi + \bar{\chi} + a\lg y_2 + \Phi(y_2 e^{-\frac{y_1}{y_2}})$.

6) I, $X_3 f = 2Re\left[z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + hz_2\frac{\partial f}{\partial z_2}\right]$; $\lg K = \chi + \bar{\chi} + a\lg y_1 + \Phi(y_1^{-h} y_2)$.

7) I, $X_3 f = 2Re\left[-z_2\frac{\partial f}{\partial z_1} + (hz_2 + z_1)\frac{\partial f}{\partial z_2}\right]$; $\lg K = \chi + \bar{\chi} + \Phi_1 +$

$$+ \Phi[\lambda y_1 - y_2)^{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda}y_1 - y_2)^{-\lambda}],\ h^2 < 4,\ \lambda = \frac{h + i\sqrt{4 - h^2}}{2},$$

Φ_1 ist hier eine bestimmte Funktion von y_1, y_2.

8) IV, $X_3 f = 2Re\left(z_1^2\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$; $\lg K = \chi + \bar{\chi} + a\lg y_1 + \Phi(x_2, y_2)$.

9) $X_1 f = 2Re\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$; $X_2 f = 2Re\left[\left(\alpha e^{iz_1} + \frac{1}{4\alpha}e^{-iz_1}\right)\frac{\partial f}{\partial z_1}\right]$;

$$X_3 f = 2Re\left[i\left(\alpha e^{iz_1} - \frac{1}{4\alpha}e^{-iz_1}\right)\frac{\partial f}{\partial z_1}\right];$$

$$\lg K = \chi + \bar{\chi} + c\lg(1 - 4\alpha\bar{\alpha}e^{-2y_1}) + \Phi(x_2, y_2).$$

Der Fall der r gliedrigen Gruppe, für $r > 3$ (insbesondere $r = 4$) soll in einer weiteren Arbeit betrachtet werden.

Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik
an der Kujbyschev Universität.
Tomsk.

Eingegangen
d. 14. IV. 1937.

ZITIERTE LITERATUR

[1] S. Bergmann, Crelles Journal, **169**, 1—40 (1932). [2] B. Fuchs, Mitt. der Forsch. Inst. f. Math. u. Mech. Tomsk, **1**, (1937). [3] S. Bergmann, Math. Annalen, **102**, 430—446 (1929). [4] B. Fuchs, Rec. Math., **2** (**44**), fasc. 3. [5] L. Bianchi, Memorie d. Soc. Italiana d. Scienze, **9**, 3 serie, (1897). [6] G. Fubini, I. Annali di Math., 8 (1902); II. Annali di Math., **9** (1903).

* Hier bedeuten: a, b, c, h reelle Konstanten, α eine komplexe Konstante, $\chi = \chi(z^1, z^2)$ eine a. F., Φ eine willkürliche reelle Funktion. Die römischen Zahlen weisen darauf hin, dass $X_1 f$, $X_2 f$ die für den Fall der zweigliedrigen Gruppe unter dieser Zahl angegebene Gestalt haben.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

ON THE MOMENT PROBLEM FOR A FINITE INTERVAL

By L. V. KANTOROVIČ

CORRECTION TO THE NOTE*

An error in the above named note should be corrected. Theorem III of that note in the form it is written there is not true. It will be true if worded, e. g., as follows.

Theorem III. In order that exists a function $\varphi(t)$ summable with its pth power and solving the momentum problem

$$\int_0^1 x^k \varphi(x)\, dx = \mu^{(k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

it is necessary and sufficient that

$$\left| \sum_{m=0}^{n} \Theta_i\, C_{n^2}^{mn}\, \Delta^{n(n-m)}\, \mu^{(mn)} \right| \leqslant H' \left\{ \sum_{m=0}^{n} \Theta_i\, C_{n^2}^{mn}\, B(mnp' + 1, n(n-m)\, p' + 1 \right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$\left(\Theta_i = 0,1;\ n = 1, 2, 3, \dots;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right),$$

where H' is a constant.

To the list of literature two papers of E. K. Haviland must be added, Amer. Journ. of Math., 57, 562—568 (1935) and 58, 164—168 (1936).

* Published in vol. XIV, № 9, p. 531—537 (1937).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

MÉCANIQUE

LES PROBLÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ À DEUX DIMENSIONS POUR LES CONTOURS À POINTS ANGULEUX

Par L. MAGNARADZE

(Présenté par I. M. Vinogradow, de l'Académie, le 7. VI. 1937)

On sait que d'après la méthode de M. N. Muschelišvili (1) la résolution des deux problèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité à deux dimensions se réduit à la détermination de deux fonctions φ et ϕ holomorphes dans le domaine occupé par le corps et qui satisfont sur le contour C du domaine aux conditions suivantes:

$$\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\,\varphi'(t) + \phi(t) = f_1 - if_2, \tag{1}$$

dans le cas du premier problème fondamental (lorsqu'on donne les efforts appliqués au contour C) et

$$\varkappa\,\overline{\varphi(t)} - \bar{t}\,\varphi'(t) - \phi(t) = 2\mu\,(g_1 - ig_2), \quad \varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} > 1, \tag{2}$$

dans le cas du deuxième problème fondamental (lorsqu'on donne les déplacements périphériques), où f_1, f_2, g_1 et g_2 sont des fonctions données sur C; λ et μ sont les constantes de Lamé.

Dans ce qui suit nous supposerons que les fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 satisfont à la condition de Hölder.

En utilisant quelques propriétés des intégrales du type de Cauchy, N. Muschelišvili a réduit la détermination des fonctions φ et ϕ d'après la condition (1) ou (2) à certaines équations intégrales régulières de Fredholm, en supposant que la frontière C est privée de points anguleux et qu'elle est d'ailleurs suffisamment régulière.

Le but de cette note est de résoudre les problèmes fondamentaux précédemment mentionnés pour les contours à points anguleux. Nous déduirons les équations intégrales pour ces problèmes par la méthode de N. Muschelišvili; il est impossible d'appliquer à ces équations la Théorie de Fredholm. Pour résoudre ces équations il suffit de généraliser légèrement les résultats de J. Radon (2). Nous commencerons par ces généralisations et nous rappellerons d'abord quelques propositions et définitions dues à J. Radon.

Soit C une courbe plane fermée de Jordan:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant l).$$

Nous plaçons l'origine des arcs dans un point régulier (c'est-à-dire dans un point non anguleux). Introduisons l'angle $\vartheta(s)$ déterminé

à un multiple de 2π près, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle, par les formules:

$$\cos\vartheta(s) = x'(s), \quad \sin\vartheta(s) = y'(s)$$

en attribuant à la fonction $\vartheta(s)$ dans les points anguleux des valeurs arbitraires.

La ligne C est une **courbe à rotation bornée** si la fonction $\vartheta(s)$ ainsi définie est une fonction à variation bornée dans l'intervalle fermé $0 \leqslant s \leqslant l$.

Désignons par $\int_C |d\vartheta|$ la variation totale de la fonction $\vartheta(s)$ dans l'intervalle $(0, l)$. Introduisons encore l'angle $\omega_P(s)$ du vecteur $\overrightarrow{PM}(s)$ avec l'axe Ox (ou avec une direction fixe quelconque), où P est un point arbitraire du plan, situé en dehors de la ligne C, et $M(s)$ un point du contour C, correspondant à l'arc s. La fonction $\omega_P(s)$ est évidemment continue dans l'intervalle $(0, l)$. On peut démontrer [2] que si la courbe C est à rotation bornée, la variation totale de fonction $\omega_P(s)$ ne surpasse pas celle de la fonction $\vartheta(s)$, c'est-à-dire $\int_C |d\omega_P| \leqslant \int_C |d\vartheta|$. Quand $P \to M(\sigma)$, où $M(\sigma)$ est un point quelconque du contour, l'angle $\omega_P(s)$ tend vers l'angle $F(s, \sigma)$ entre le vecteur $\overrightarrow{M(\sigma)M(s)}$ et l'axe Ox. Si la courbe C est à rotation bornée, $F(s, \sigma)$ est une fonction à variation bornée par rapport à σ pour tout s dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant l$. Évidemment nous pouvons parler seulement de la limite gauche et de la limite droite de l'angle $F(s, \sigma)$ quand $\sigma \to s$ c'est-à-dire des quantités $F(s, s+)$ et $F(s, s-)$. Il est clair que $|F(s, s+) - F(s, s-)| = |\vartheta(s+) - \vartheta(s-)|$. Il est toujours possible de supposer que le saut de la fonction $\vartheta(s)$ au point s, c'est-à-dire $|\vartheta(s+) - \vartheta(s-)| \leqslant \pi$. Les points du contour où $|\vartheta(s+) - \vartheta(s-)| = \pi$ sont des points de rebroussement; dans les autres points $|\vartheta(s+) - \vartheta(s-)| < \pi$. Si la courbe C est à rotation bornée, elle peut avoir des points de rebroussement en nombre fini et des points anguleux en infinité dénombrable.

Soit $\varphi(s)$ une fonction quelconque continue le long de C $(0 \leqslant s \leqslant l)$ et telle que $\varphi(0) = \varphi(l)$.

Envisageons l'intégrale de Stieltjes * suivante.

$$W_P = \frac{1}{\pi} \int_C \varphi(\sigma)\, df(\omega_P),$$

où

$$f(\omega_P) = \omega_P + \frac{m}{2} \sin 2\omega_P \text{ et } m = -\frac{1}{\varkappa} \text{ ou } 1.$$

Nous allons étudier les propriétés de la fonction W_P à l'aide de la méthode de J. Radon. D'abord, lorsque le point P tend vers un point $M(s)$ de la courbe C de l'intérieur où de l'extérieur, nous obtenons respectivement les valeurs limites extérieure et intérieure de W_P:

$$W_s^{+} = \frac{1}{\pi} \int_C \varphi(\sigma)\, d_\sigma f(F) + \varphi(s)$$

---

* J. Radon dans son mémoire [2] étudie les propriétés de la fonction W_P pour $f(\omega_P) = \omega_P$. Dans ce qui suit nous avons besoin des propriétés de la fonction W_P pour $f(\omega_P) = \omega_P + \frac{m}{2} \sin 2\omega_P$.

et

$$W_s^- = \frac{1}{\pi} \int_C \varphi(\sigma)\, d_\sigma f(F) - \varphi(s).$$

L'expression $(T\varphi)_s = \frac{1}{\pi} \int_C \varphi(\sigma)\, d_\sigma f(F)$ est une transformation fonctionnelle linéaire dans le domaine des fonctions φ. En fixant s, la transformation fonctionnelle devient un opérateur fonctionnel linéaire $(T\varphi)_s$. Dans son mémoire [3] J. Radon a démontré le théorème très important suivant:

On peut représenter chaque opérateur fonctionnel linéaire sous la forme d'une intégrale de J. Radon (l'intégrale de Stieltjes de première ou de deuxième espèce au sens de J. Radon) c'est-à-dire:

$$(T\varphi)_s = \frac{1}{\pi} \int_C \varphi(\sigma)\, d\Psi_s,$$

où $\int_C$ désigne l'intégrale au sens de J. Radon et Ψ_s est une fonction absolument additive d'ensemble, déterminée d'une façon unique par l'opérateur linéaire.

Par la méthode de J. Radon il est aisé de constater la relation suivante entre les fonctions $f(F(s, \sigma))$ et $\Psi_s(E)$:

$$\Psi_s(J_{s_1 s_2}) = f(F(s_1 s_2 -)) - f(F(s_1 s_1 -)),$$

où

$$J_{s_1 s_2} = E(s_1 \leqslant \sigma < s_2).$$

Enlevons du contour une partie quelconque $C_{s\varepsilon}$ $(s - \varepsilon \leqslant \sigma \leqslant s + \varepsilon)$, alors

$$(T\varphi)_s = \frac{1}{\pi} \int_{C - C_{s\varepsilon}} \varphi(\sigma)\, d\Psi_s = \frac{1}{\pi} \int_{C_{s\varepsilon}} \varphi(\sigma)\, d\Psi_s = (V\varphi)_s + (T_1\varphi)_s.$$

Il en suit, en supposant que le saut

$$|\vartheta(s+) - \vartheta(s-)| < \pi - |m|, \tag{3}$$

que l'on a l'inégalité

$$|(T_1\varphi)_s| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_C |d\vartheta| + \left| \frac{m h(\varepsilon)}{\pi} \right|$$

$$\text{avec } |\varphi| \leqslant 1, \text{ où } h(\varepsilon) = \pm \lim_{P \to M(s)} \int_{C_{s\varepsilon}} \cos 2\omega_P\, |d\omega| .$$

Il est aisé de démontrer que $|(V\varphi)_s - (V\varphi)_{s'}| \leqslant A|s - s'|$ pour $|\varphi| \leqslant 1$, c'est-à-dire, que l'opérateur $(V\varphi)$ est totalement continu. Dans ce qui suit nous envisagerons seulement les courbes pour lesquelles $|h(\varepsilon)| \leqslant 1$ (ce qui a toujours lieu si la courbe a des points anguleux en nombre fini).

Dans son mémoire cité J. Radon démontre que $\frac{1}{\pi} \int_{C_{s\varepsilon}} |d\vartheta| < \frac{\theta + \eta(\varepsilon)}{\pi}$, où θ est le plus grand saut $|\vartheta(s+) - \vartheta(s-)|$ sur C et $\lim_{\varepsilon \to 0} \eta(\varepsilon) = 0$.

Donc, nous avons définitivement:

$$|(T_1\varphi)_s| < \frac{\theta + |m| + \eta(\varepsilon)}{\pi} \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0} \eta(\varepsilon) = 0.$$

Envisageons la série des opérateurs:

$$T_1 + \lambda T_1^2 + \lambda^2 T_1^3 + \ldots$$

Comme la borne supérieure pour T_1 est $\frac{\theta + |m| + \eta}{\pi}$, cette série est convergente au moins pour $|\lambda| < \frac{\pi}{\theta + |m| + \eta}$. D'ailleurs, comme ε est un nombre positif arbitraire, nous pouvons dire que le degré de continuité où le rayon de Fredholm pour l'opérateur $T = V + T_1$, où V est totalement continue, est au moins égal à $\frac{\pi}{\theta + |m|}$. Il en suit que, si nous avons l'équation fonctionnelle

$$\varphi + \lambda T \varphi = f,$$

où φ est inconnue, et f est la fonction donnée, on peut construire pour cette équation une théorie analogue à celle de Fredholm, pourvu que $|\lambda| < \frac{\pi}{\theta + |m|}$. Par conséquent, cette théorie est applicable à l'équation $\varphi \pm T\varphi = f$, car en vertu de l'inégalité (3), $\theta + |m| < \pi$.

Nous allons appliquer la théorie exposée aux équations intégrales de N. Muschelišvili pour le problème plan de la théorie de l'élasticité. Nous supposerons que le nombre des points anguleux est fini. À l'aide de quelques propriétés des intégrales du type de Cauchy nous obtenons par la méthode de N. Muschelišvili l'équation intégrale suivante pour la fonction φ:

$$\frac{\alpha}{\pi}\overline{\varphi(t_0)} + \frac{\sin\alpha}{\pi} e^{-i(\alpha+2\beta)}\varphi(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_C [\overline{\varphi(t)} + \varphi(t) e^{-2iF}]\, dF = -A_e(t_0), \quad (4)$$

où $A_e(t_0) = \lim_{z \to t_0} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_1 - if_2}{t - z}\, dt$ quand le point z tend vers un point t_0 du contour en restant toujours extérieur au domaine, et β, $\alpha + \beta$ désignent les angles des tangentes au point anguleux t_0 avec l'axe Ox. Si le point t_0 n'est pas angulaire, alors $\alpha = \pi$. Si dans l'équation (4) nous remplaçons l'intégrale ordinaire par des intégrales de Stieltjes, en attribuant à la fonction F au point t_0 un poids quelconque, alors (4) prend la forme suivante:

$$\overline{\varphi(t_0)} - \frac{1}{\pi}\int_C [\overline{\varphi}(t) + \varphi(t) e^{-2iF}]\, dF = -A_e(t_0).$$

D'une façon tout à fait analogue on obtient pour le deuxième problème fondamental l'équation intégrale

$$\overline{\varphi(t_0)} - \frac{1}{\pi}\int_C [\overline{\varphi(t)} - \frac{e^{-2iF}}{\varkappa}\varphi(t)]\, dF = B_e(t_0).$$

Il est clair que ces équations intégrales peuvent être écrites sous la forme d'une équation unique:

$$\overline{\varphi(t_0)} - \frac{1}{\pi}\int_C [\overline{\varphi(t)} + m e^{-2iF}\varphi(t)]\, dF = C(t_0).$$

En séparant les parties réelles et imaginaires nous obtenons un système d'équations intégrales réelles. Nous réduisons ce système par la méthode habituelle à une équation intégrale unique:

$$\varphi(t_0) - \frac{\lambda}{\pi}\int_C \varphi(t) K(F)\, dF = f(t_0)$$

où

$$\varphi(t_0) = \lambda (T\varphi)_{t_0} + f(t_0). \qquad (5)$$

Mais nous avons démontré précédemment qu'on peut appliquer à cette équation la théorie de Radon pour $\lambda = 1$ car pour les courbes examinées on a, d'après l'hypotèse faite $\theta < \pi - |m|$.

Nous nous bornerons dans ce qui suit à l'étude du deuxième problème fondamental $\left(m = -\frac{1}{\varkappa} = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)$.

En suivant la méthode indiquée par D. Šerman [5] pour le cas d'un contour régulier, nous ajoutons au second membre de notre équation la fonctionnelle $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)}{t}\,dt$. Cette transformation ne change pas le rayon de Fredholm, car la fonctionnelle ajoutée est, evidemment, totalement continue. Il est aisé de déduire du système des équations intégrales ainsi obtenues (comp. [5]) que chaque solution régulière φ satisfait à la condition $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = 0$.

Ensuite nous envisageons l'équation intégrale homogène correspondante. Il est aisé de démontrer que dans ce cas la détermination des fonctions φ, ψ est équivalente à la résolution du deuxième problème fondamental pour le cas où les déplacements sont nuls sur le contour. En vertu du théorème d'unicité de la solution régulière, il en suit que $\varphi = \text{const.}$ Mais, alors la condition $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = 0$ donne $\varphi \equiv 0$.

Par conséquent, l'équation homogène pour $\lambda = 1$ n'admet que la solution nulle (régulière). Ainsi $\lambda = 1$ n'est pas un nombre caractéristique pour notre équation et, par conséquent, l'équation non homogène admet toujours une solution. Pour simplifier nous avons envisagé le cas d'un domaine simplement connexe limité par un contour C. D'une façon analogue on peut résourde le deuxième problème fondamental de la théorie de l'élasticité pour un domaine quelconque multiplement connexe, dont la frontière est formée par les contours à points anguleux du type précédemment indiqué.

Nos recherches sur le premier problème fondamental ne sont pas encore achevées.

Institut mathématique de la
Section Géorgienne de l'Académie
des Sciences de l'URSS.
Tbilissi.

Manuscrit reçu
le 7. VI. 1937.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] N. I. Muschelišvili, C. R. Acad. Sci. URSS, III, 7 (1934). [2] J. Radon, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, math.-naturw. Kl., **128**, Abt. IIa, 1123 (1919). [3] J. Radon, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, math.-naturw. Kl., **122**, Abt. IIa, 1295 (1913). [4] J. Radon, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, math.-naturw. Kl., **128**, Abt. IIa, 1083 (1919). [5] D. I. Šerman, C. R. Acad. Sci. URSS, IV, № 3 (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

MÉCANIQUE

SUR UNE REPRÉSENTATION COMPLEXE DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME STATIONNAIRE PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

Par I. N. VÉCOUA

(Présenté par I. M. Vinogradow, de l'Académie, le 22. VI. 1937)

Supposons que l'oscillation d'un milieu élastique homogène et isotrope est telle que l'état de mouvement est le même en tous les plans parallèles au plan XY. Supposons de plus que la composante W du vecteur de déplacement suivant l'axe z est nulle. Alors on sait de la théorie d'élasticité que les composantes U et V auront la forme:

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{1}$$

où φ et ψ vérifient respectivement les équations:

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi, \quad b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta \psi \tag{2}$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \quad b = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\right).$$

2. Supposons que

$$\varphi = e^{i\nu t}\varphi_1(x, y), \quad \psi = e^{i\nu t}\psi_1(x, y), \tag{3}$$

où ν est un paramètre réel qu'on nomme fréquence des oscillations. On a alors en vertu de (2):

$$\Delta\varphi_1 + a^2\nu^2\varphi_1 = 0, \quad \Delta\psi_1 + b^2\nu^2\psi_1 = 0. \tag{4}$$

De plus il suit de (1) en vertu de (3) que

$$U = e^{i\nu t}U_1(x, y), \quad V = e^{i\nu t}V_1(x, y), \tag{5}$$

où

$$U_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \text{ et } V_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}. \tag{6}$$

Nous dirons que U_1 et V_1 sont les amplitudes du déplacement. La recherche des amplitudes du déplacement et du déplacement lui-même se réduit ainsi à l'intégration des équations d'oscillation (4).

Nous allons donner maintenant une représentation générale de la solution d'une équation d'oscillation au moyen de fonctions analytiques d'une variable complexe.

3. Considérons l'équation d'oscillation

$$\Delta\varphi + \lambda^2\varphi = 0, \tag{7}$$

où λ est un paramètre numérique. En introduisant des nouvelles variables $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, on réduit cette équation à la forme:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\lambda^2}{4}\varphi = 0. \tag{8}$$

Cette équation est équivalente à une équation intégrale de Volterra dans un domaine complexe à deux dimensions:

$$\varphi(z, \bar{z}) + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} \varphi(\xi, \eta)\, d\eta = f(z) + \bar{g}(\bar{z}), \tag{9}$$

où $f(z)$ et $\bar{g}(\bar{z})$ sont des fonctions analytiques arbitraires des variables z et $\bar{z}$ respectivement.

En intégrant cette équation par la méthode des approximations successives, et en posant

$$\varphi_0 = f(z) + \bar{g}(\bar{z}), \quad \varphi_n = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} \varphi_{n-1}(\xi, \eta)\, d\eta \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

on obtient

$$\varphi(z, \bar{z}) = f(z) + \bar{g}(\bar{z}) + \int_0^z H\left(z, \bar{z}, \xi, \frac{\lambda}{2}\right) f(\xi)\, d\xi + \int_0^{\bar{z}} H\left(\bar{z}, z, \xi, \frac{\lambda}{2}\right) \bar{g}(\xi)\, d\xi, \tag{11}$$

où

$$H\left(z, \bar{z}, \xi, \frac{\lambda}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n} \bar{z}^n (z-\xi)^{n-1}}{(n-1)!\, n!} = -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\bar{z}}{z-\xi}\right)^{\frac{1}{2}} J_1\left(\lambda\sqrt{\bar{z}(z-\xi)}\right). \tag{12}$$

La formule (11) donne la solution générale de l'équation d'oscillation (8). Si l'on suppose que λ^2 est réel et si l'on ne cherche que les solutions réelles de l'équation (8), il faut poser dans la formule (11) $\bar{f}(\bar{z}) = \bar{g}(\bar{z})$, en supposant x et y réelles, le trait indiquant la valeur conjuguée.

On en déduit sans difficulté qu'une solution quelconque de l'équation (8) régulière et réelle dans un certain domaine connexe est, pour λ^2 réel, présentée par la formule:

$$\varphi(z, \bar{z}) = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) + \int_0^z H\left(z, \bar{z}, \xi, \frac{\lambda}{2}\right) f(\xi)\, d\xi + \int_0^{\bar{z}} H\left(\bar{z}, z, \xi, \frac{\lambda}{2}\right) \bar{f}(\xi)\, d\xi, \tag{13}$$

où $f(z)$ est une fonction analytique régulière dans le domaine donné. Remarquons ici qu'en ajoutant à $f(z)$ une constante imaginaire et d'ailleurs quelconque on ne modifie pas la valeur du second membre de la formule (13). C'est un fait dont nous aurons besoin dans la suite.

4. En vertu des formules (6) nous aurons:

$$U_1 + iV_1 = 2\frac{\partial(\varphi_1 - i\psi_1)}{\partial\bar{z}}. \tag{14}$$

Nous dirons que le vecteur U_1+iV_1 est l'amplitude complexe du déplacement. Nous allons le représenter maintenant au moyen de deux fonctions analytiques d'une variable complexe.

Il suit de (13) que l'on a:

$$\varphi_1 = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) + \int_0^z H\left(z, \bar{z}, \xi, \frac{a\nu}{2}\right) f(\xi)\, d\xi + \int_0^{\bar{z}} H\left(\bar{z}, z, \xi, \frac{a\nu}{2}\right) \bar{f}(\xi)\, d\xi, \tag{15}$$

$$\psi_1 = g(z) + \bar{g}(\bar{z}) + \int_0^z H\left(z, \bar{z}, \xi, \frac{b\nu}{2}\right) g(\xi)\, d\xi + \int_0^{\bar{z}} H\left(\bar{z}, z, \xi, \frac{b\nu}{2}\right) \bar{g}(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

où $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions analytiques régulières arbitraires. Nous avons remarqué précédemment qu'on peut ajouter à chacune de ces fonctions un nombre complexe arbitraire, donc on peut toujours s'arranger de manière à avoir $f(0) + ig(0) = 0$.

En substituant ces expressions dans la formule (14) on obtient:

$$U_1 + iV_1 = 2\bar{f}'(\bar{z}) - 2i\bar{g}'(\bar{z}) - \frac{\nu^2}{2} z\,[a^2\bar{f}(\bar{z}) - ib^2\bar{g}(\bar{z})] +$$

$$+ 2\int_0^z \left[\frac{\partial H\left(z, \bar{z}, \xi, \frac{a\nu}{2}\right)}{\partial\bar{z}} f(\xi) - i\frac{\partial H\left(z, \bar{z}, \xi, \frac{b\nu}{2}\right)}{\partial\bar{z}} g(\xi)\right] d\xi +$$

$$+ 2\int_0^{\bar{z}} \left[\frac{\partial H\left(\bar{z}, z, \xi, \frac{a\nu}{2}\right)}{\partial\bar{z}} \bar{f}(\xi) - i\frac{\partial H\left(\bar{z}, z, \xi, \frac{b\nu}{2}\right)}{\partial\bar{z}} \bar{g}(\xi)\right] d\xi. \tag{17}$$

En introduisant les notations nouvelles

$$a^2 f(z) + ib^2 g(z) = \frac{2}{\nu^2} F'(z), \quad f(z) + ig(z) = \frac{1}{2}\int_0^z \Psi(t)\, dt, \tag{18}$$

on aura:

$$f(z) = -\frac{2}{\nu^2(b^2 - a^2)} F'(z) + \frac{b^2}{2(b^2 - a^2)}\int_0^z \Psi(t)\, dt, \tag{19}$$

$$g(z) = -\frac{2i}{\nu^2(b^2 - a^2)} F'(z) + \frac{a^2 i}{2(b^2 - a^2)}\int_0^z \Psi(t)\, dt. \tag{20}$$

En substituant ces expressions dans la formule (17) on aura, après avoir effectué quelques transformations simples et évidentes, la formule cherchée

$$U_1 + iV_1 = \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} F(z) - z\bar{F}'(\bar{z}) + \frac{a^2 + b^2}{8}\nu^2 z^2 \bar{F}(\bar{z}) +$$

$$+ \overline{\Psi}(\bar{z}) + \int_0^z H_1(z, \bar{z}, \xi) F(\xi)\, d\xi + \int_0^{\bar{z}} H_2(z, \bar{z}, \xi)\, \bar{F}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^z H_3(z, \bar{z}, \xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi + \int_0^{\bar{z}} H_4(z, \bar{z}, \xi)\, \overline{\Psi}(\xi)\, d\xi, \tag{21}$$

où

$$H_1(z, \bar{z}, \xi) =$$

$$= -\frac{\nu}{2(b^2-a^2)}\left(\frac{\bar{z}}{z-\xi}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{a^3 J_1\left(a\nu\sqrt{\bar{z}(z-\xi)}\right) + b^3 J_1\left(b\nu\sqrt{\bar{z}(z-\xi)}\right)\right\}, \quad (22)$$

$$H_2(z, \bar{z}, \xi) =$$

$$= \frac{\nu}{2(b^2-a^2)}\left(\frac{z}{\bar{z}-\xi}\right)^{\frac{3}{2}}\left\{a^3 J_3\left(a\nu\sqrt{z(\bar{z}-\xi)}\right) - b^3 J_3\left(b\nu\sqrt{z(\bar{z}-\xi)}\right)\right\}. \quad (23)$$

$$H_3(z, \bar{z}, \xi) =$$

$$= -\frac{ab\nu}{2(b^2-a^2)}\left(\frac{z-\xi}{\bar{z}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{bJ_1\left(a\nu\sqrt{\bar{z}(z-\xi)}\right) + aJ_1\left(b\nu\sqrt{\bar{z}(z-\xi)}\right)\right\}, \quad (24)$$

$$H_4(z, \bar{z}, \xi) =$$

$$= \frac{ab\nu}{2(b^2-a^2)}\left(\frac{z}{\bar{z}-\xi}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{bJ_1\left(a\nu\sqrt{z(\bar{z}-\xi)}\right) - aJ_1\left(b\nu\sqrt{z(\bar{z}-\xi)}\right)\right\}. \quad (25)$$

Il est facile à vérifier qu'en ajoutant à $F(z)$ une constante complexe arbitraire on ne modifie pas le second membre de la formule (21), donc nous pouvons toujours supposer que $F(0) = 0$.

La formule (21) donnant la représentation générale pour l'amplitude complexe du déplacement coïncide, pour $\nu = 0$, avec la représentation connue du vecteur de déplacement dans le cas de l'équilibre élastique plan (1).

On obtient des expressions pour les amplitudes des composantes de la tension en tenant compte des formules

$$X_x + Y_y = e^{i\nu t}[X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}], \; X_x - Y_y + 2iX_y = e^{i\nu t}[X_x^{(1)} - Y_y^{(1)} + 2iX_y^{(1)}], \quad (26)$$

où

$$X_x^{(1)} + Y_y^{(1)} = 2(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial(U_1+iV_1)}{dz} + \frac{\partial(U_1+iV_1)}{\partial\bar{z}}\right],$$

$$X_x^{(1)} - Y_y^{(1)} + 2iX_y^{(1)} = 4\mu\frac{\partial(U_1+iV_1)}{\partial\bar{z}}. \quad (27)$$

5. Nous allons considérer maintenant une application de la formule (21) au problème des oscillations élastiques propres d'un domaine circulaire dont la frontière reste fixe. Il faut trouver à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant R$ des fonctions analytiques $F(z)$ et $\Psi(z)$ telles que l'on ait l'égalité:

$$[U_1 + iV_1]_{|z|=R} = 0. \quad (28)$$

A cet effet posons dans la formule (21)

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \quad \text{et} \quad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k. \quad (29)$$

En effectuant quelques calculs élémentaires, on obtient en vertu de la condition (24) les équations suivantes pour les coefficients a_k et b_k:

$$a_1 N_1^{(1)}(\nu R) + \bar{a}_1 N_1^{(2)}(\nu R) = 0 \quad (30)$$

et

$$\left.\begin{aligned} N_{k+2}^{(1)}(\nu R)\,a_{k+2} + \nu^2 N_k^{(3)}(\nu R)\,b_k = 0, \\ R^2 N_{k+2}^{(2)}(\nu R)\,a_{k+2} + N_k^{(4)}(\nu R)\,b_k = 0, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

où

$$N_k^{(1)}(x) = \frac{k!\,2^k}{(b^2-a^2)\,x^k}\left[\frac{1}{a^{k-2}}J_k(ax) + \frac{1}{b^{k-2}}J_k(bx)\right],$$

$$N_k^{(2)}(x) = -\frac{k!\,2^k}{(b^2-a^2)\,x^k}\left[\frac{1}{a^{k-2}}J_{k-2}(ax) - \frac{1}{b^{k-2}}J_{k-2}(bx)\right],$$

$$N_k^{(3)}(x) = -\frac{k!\,2^k}{(b^2-a^2)\,x^{k+2}}\left[\frac{b^2}{a^k}J_{k+2}(ax) + \frac{a^2}{b^k}J_{k+2}(bx)\right],$$

$$N_k^{(4)}(x) = \frac{k!\,2^k}{(b^2-a^2)\,x^k}\left[\frac{b^2}{a^k}J_k(ax) - \frac{a^2}{b^k}J_k(bx)\right].$$

Le déterminant du système (31)

$$\Delta_k(\nu R) = \frac{k!\,(k+2)!\,2^{2k+2}}{(b^2-a^2)\,(\nu R)^{2k+2}\,(ab)^k}\left[J_{k+2}(a\nu R)\,J_k(b\nu R) + J_{k+2}(b\nu R)\,J_k(a\nu R)\right. \tag{32}$$

n'a, comme il est aisé de voir, que des racines réelles symétriques par rapport à l'origine des coordonnées.

En désignant par $\mu_{k,m}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$; $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$) les racines de l'équation $\Delta_k(\mu) = 0$, on obtient pour la fréquence ν une suite infinie de valeurs caractéristiques:

$$\nu_{k,m} = \frac{\mu_{k,m}}{R} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots ;\ m = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{33}$$

En vertu de (35) on aura donc pour les coefficients a_k et b_k

$$a_{k+2,\,m} = c_{k,m}\,N_k^{(4)}(\mu_{k,m}), \qquad b_{k,m} = -c_{k,m}\,R^2 N_{k+2}^{(2)}(\mu_{k,m}), \tag{34}$$

où les $C_{k,m}$ sont des constantes arbitraires. Il leur correspondent les fonctions caractéristiques:

$$F_{k,m}(z) = c_{k,m}N_k^{(4)}(\mu_{k,m})\,z^{k+2}, \qquad \psi_{k,m}^{(z)}(z) = -c_{k,m}\,R^2 N_{k+2}^{(2)}(\mu_{k,m})\,z^k. \tag{35}$$

Aux fréquences caractéristiques (33) corresyondent les amplitudes complexes caractéristiques:

$$\begin{aligned} U_1^{(k,m)} + iV_1^{(k,m)} = c_{k,m}\Big[& N_k^{(4)}(\mu_{k,m})\,N_{k+2}^{(1)}\left(\mu_{k,m}\frac{r}{R}\right) - \\ & -\mu_{k,m}^2\,N_{k+2}^{(2)}(\mu_{k,m})N_k^{(3)}\left(\mu_{k,m}\frac{r}{R}\right)\Big]\,z^{k+2} + \\ & + \overline{c}_{k,m}\Big[r^2 N_k^{(4)}(\mu_{k,m})N_{k+2}^{(1)}\left(\mu_{k,m}\frac{r}{R}\right) - \\ & - R^2 N_{k+2}^{(2)}(\mu_{k,m})\,N_k^{(4)}\left(\mu_{k,m}\frac{r}{R}\right)\Big]\,\overline{z}^k. \end{aligned} \tag{36}$$

En posant $a_1 = \alpha + i\beta$ on obtient de l'équation (26), en vertu de (28) et (29),

$$J_1(a\nu R) = 0, \quad J_1(b\nu R) = 0. \tag{37}$$

Si l'on désigne par ν_n ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) ($\nu_n \neq 0$) les racines de la première de ces équations, alors les racines de la seconde équation

seront $\nu'_n = \frac{a}{b}\nu_n$. Les amplitudes complexes caractéristiques correspondant à ces fréquences seront

$$U_{1n} + iV_{1n} = \alpha_n \frac{1}{r} J_1(a\nu r)\, z, \quad U'_{1n} + iV'_{1n} = i\beta_n \frac{1}{r} J_1(b\nu'_n r)\, z, \qquad (38)$$

$$(n = \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots),$$

où α_n et β_n sont des constantes réeles arbitraires.

On résoud de la même manière par un développement en série le problème sur les oscillations propres pour un cercle dans le cas où il n'y a pas de tension sur la frontière.

Le problème sur les oscillations élastiques propres dans le cas d'un domaine connexe arbitraire se réduit en vertu de la formule (21) à des équations intégrales de Fredholm. Dans un article prochain nous nous proposons d'étudier ces équations intégrales.

Institut mathématique de la Section Géorgienne de l'Académie des Sciences de l'URSS. Tbilissi.

Manuscrit reçu le 22. VI. 1937.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Н. И. Мусхелишвилли, Некоторые задачи теории упругости, стр. 106, Ленинград (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

HIDRODYNAMICS

ADDITIONAL CONSIDERATIONS REGARDING THE DISTRIBUTION OF VELOCITIES IN TURBULENT UNIFORM FLOW

By V. A. GAVRILENKO

(Communicated by N. N. Pavlovsky, Member of the Academy, 9. V. 1937)

Comparison of experimental data on the distribution of velocities with values calculated by means of the formulae developed by the writer ([1], [2]) was carried out for the cases of flow through a rectangular tube and through circular pipes with rough and smooth inner surface. The comparison has shown, in general, fairly good agreement between calculated and experimental data ([2], [3]). Similarly satisfactory results were obtained by N. N. Pavlovsky, Member of the Academy of Sciences, who carried out the comparison for tubes of trapezoidal and triangular cross-sections ([4]). One of the above mentioned tests, however, (with the rectangular tube) has shown that the shape of the velocity diagram corresponding to the line parallel to the shorter side of the rectangle and located from that side at a distance of 0.011 of the width of the tube, did not coincide with the calculated diagram.

The calculated diagram had a shape of a convex curve with the apex at the center, while the experimental one was concave in the middle and had two equal maxima. This fact led the writer to conclude that the basic principles ([1], [2]) of this theory do not fully take into account the factor causing the formation of the concavity in the velocity diagrams, and that the basic principles must be somewhat modified.

Another consideration which led to the modification of the basic principles put forward by the writer, was due to the fact that these principles, in their original wording ([1], [2]), are not applicable—from the formal point of view—to flows with non-convex shapes, or to cases where the walls have a non-uniform roughness.

After investigations which were carried out in connection with the above mentioned circumstances, it was found that it is necessary to subject the basic principles ([1], [2]) to a modification, consisting in the introduction of an assumption that the elementary velocity gradient dg is proportional to the length of an element of the wetted perimeter ds and not (as it was previously assumed) to its projection on the plane normal to the ray l connecting the element ds with the point of the cross-section where the velocity is being determined*.

* Reported by the writer at the Meeting of the Technical Mechanics Division of the Academy of Sciences of the USSR, on Dec. 25, 1936.

This new assumption leads to the following equation for the elementary velocity gradient dg [notation as before ([1], [2])]:

$$dg = k \cdot p_i \cdot \frac{ds}{l^2}. \tag{1}$$

The general equation for the function, Θ, representing the reduced deficient velocity, as was shown by N. N. Pavlovsky ([4]), assumes the following form:

$$\Theta(x_A; y_A) = -\sum_{i=1}^{i=n} p_i \left\{ \int_{x_c}^{x_A} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\cos\alpha}{l^2} ds \right]_{y=y_A} dx + \int_{y_c}^{y_A} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\sin\alpha}{l^2} ds \right]_{x=x_c} dy \right\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{i=n} p_i \left\{ \int_{x_c}^{x_A} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\cos\alpha}{l^2} ds \right]_{y=y_c} dx + \int_{y_c}^{y_A} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\sin\alpha}{l^2} ds \right]_{x=x_A} dy \right\}. \tag{2}$$

Here x_c and y_c are the coordinates of the point of the cross-section which is taken as the lower limit of integration, and at which, therefore, the value of Θ is equal to zero.

Following the example of N. N. Pavlovsky, who introduced the concept of the partial velocity gradient ([4]), and introducing also the partial function Θ_i depending upon only one part of the wetted perimeter, where the value of p_i remains unchanged, we have:

$$\Theta_i(x_A; y_A) = -\left\{ \int_{x_c}^{x_A} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\cos\alpha}{l^2} ds \right]_{y=y_A} dx + \int_{y_c}^{y_A} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\sin\alpha}{l^2} ds \right]_{x=x_c} dy \right\} =$$

$$= -\left\{ \int_{x_c}^{x_A} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\cos\alpha}{l^2} ds \right]_{y=y_c} dx + \int_{y_c}^{y_A} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\sin\alpha}{l^2} ds \right]_{x=x_A} dy \right\}. \tag{3}$$

The preceding considerations permit the general expression for the function Θ to be written in the following simplified form:

$$\Theta(x_A; y_A) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \cdot \Theta_i(x_A; y_A). \tag{4}$$

Reviewing new equations (2), or (3) and (4) for the function Θ we see that the introduced modification does not alter the general properties of this function, as they have been established before. Function Θ is here, as it was before, a homogeneous, dimensionless function of the coordinates of the point $A(x_A; y_A)$ of the cross-section. The analytic expression of this function depends only upon the shape of the cross-section (under condition that the conception of "shape" maens not only the shape proper of the channel cross-section but also the relative distribution of zones of the wetted perimeter differing from one another by varying degrees of roughness, as expressed by the parameter p_i).

This circumstance makes it possible, in further study, to use relative coordinates ξ and η, instead of absolute coordinates x_A and y_A.

Taking into account, apart from what has been said above with respect to the function Θ, that the general equation for the velocity remains as before:

$$\varphi_{x_A; y_A} = \varphi_{x_c; y_c} - k\Theta(x_A; y_A) \tag{5}$$

or

$$\varphi_{x_A; y_A} = \varphi_m - k[\Theta(x_A; y_A) + \Omega(\Phi)], \tag{6}$$

where v_m is the average velocity of the stream,

$$\Omega(\Phi) = [\Theta(x; y)]_{v=v_m} = \frac{1}{\omega}\int_{\omega} \Theta(x; y) \cdot d\omega, \qquad (7)$$

ω = the cross-section of the stream, — we come to the conclusion that the general properties of turbulent streams, as regards the distribution of velocities remain the same as stated in the foregoing ([1, 2]), including the very important property — the permanent location of the mean-velocity points.

As regards the parameter k it will also be expressed by the previously derived formula ([1, 2]), with the only difference that in connection with the change of numerical value of $\Omega(0)$ the dimensionless coefficient c is now equal to 2.35 (instead of 2.55).

$$k \approx 2.35 \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = 2.35 \cdot v_* = 2.35 \cdot \sqrt{g \cdot R \cdot J}. \qquad (8)$$

If particular cases are to be considered, the analytic expressions of the function Θ can be developed on the base of the general equation (2), or (3) and (4).

For a circular homogeneous pipe, we have:

$$\Theta(r') = 4\int_0^{r'}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r' \cdot \cos^2\alpha}{(1-r'^2)\cdot\sqrt{1-r'^2\cdot\sin^2\alpha}}\, d\alpha \cdot dr' =$$

$$= 4\int_0^{r'} \frac{E-(1-r'^2)K}{r'(1-r'^2)}\, dr', \qquad (9)$$

where r' is the ratio of the distance between the center of the pipe and the point considered, to the radius of the pipe; K and E are total elliptical integrals of the first and second orders, with modulus r'.

For a plane flow we have:

$$\Theta(\eta) = -2\ln(1-\eta^2), \qquad (10)$$

where η is the relative distance between the point considered and the middle line of the cross-section, expressed as a fraction of the half-distance between the boundaries of the cross-section.

For streams with cross-sections represented by convex polygons with finite number of sides and with constant values of p_i, the expression for the function Θ can be easily written on the base of equation (4). The analytic expression for a partial function Θ, however, depends in this case upon the relative position of every one of the points $C(x_C; y_C)$, and $A(x_A; y_A)$, with reference to the corresponding side of the polygon. For instance, if both points A and C are located within a strip bounded by two straight lines, perpendicular to the corresponding side of the polygon in the segment I—II, and passing through the ends of that straight line I $(x_1; y_1)$, and II $(x_2; y_2)$, we have:

$$\Theta_{12}(x_A; y_A) =$$

$$= ln\frac{[(x_2-x_1)(x_2-x_A)+(y_2-y_1)(y_2-y_A)+s_{12}l_2]\cdot[x_1-x_2)(x_1-x_A)+(y_1-y_2)(y_1-y_A)+s_{12}\cdot l_1]}{[(y_2-y_1)(x_2-x_A)-(x_2-x_1)(y_2-y_A)]^2} +$$

$$+ B, \qquad (11)$$

where s_{12} is the length of the segment I—II; l_1 and l_2 are the distances between the point A and the beginning and the end of the segment

I—II; B is the constant, the numerical value of which is determined from the condition;

$$\Theta_i(x_A = x_C;\ y_A = y_C) = 0.$$

For other positions with regard to I—II of the points A and C, other formulae are obtained, analogous to the former ones.

Thus, using formulae of the type (11), and (4), it is possible to obtain an expression for the function Θ, for every convex polygon, determined by the coordinates of the vertices.

Composing thus an equation for the function Θ for a convex polygon, and then plotting a diagram showing the distribution of the velocity along a straight line located sufficiently close to one of the sides of the polygonal cross-section, we will notice that the diagram has in its middle part a cavity, characteristic for velocity diagrams for lines located near the boundaries of the cross-section.

The comparison of experimental data on velocity distribution in circular homogeneous pipes with the distribution of velocities computed (for the same pipes) from the formula (9), shows the same satisfactory agreement, as has been obtained in the former comparative studies ([2, 3]) based on the previously derived formula.

This fact could be anticipated on account of the geometrical properties of circles. We have also compared experimental ([5, 6]) and theoretical distribution of velocities for two triangular and one trapezoidal tubes. This comparison has also shown fairly satisfactory agreement between the theory and the experiment. The results of these investigations will shortly be published.

The All-Union Scientific Research Institute of Hydrotechnics. Leningrad.

Received 14. VI. 1937.

REFERENCES

[1] V. A. Gavrilenko, C. R. Acad. Sci. URSS, II (XI) № 9 (95) (1936). [2] В. А. Гавриленко, Изв. Н.-исслед. ин-та гидротехники, XIX (1936). [3] V. A. Gavrilenko, C. R. Acad. Sci. URSS, XV, 8 (1937). [4] Н. Н. Павловский, Изв. Н.-исслед. ин-та гидротехники, XIX (1936). [5] J. Nikuradse, V. D, I. Forschungsheft, 281 (1926). [6] J. Nikuradse, Ingenieur-Archiv, I, № 3 (1930).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

MATHEMATISCHE PHYSIK

ZUR THEORIE DER ELEKTROMAGNETISCHEN SCHWINGUNGEN IM EBENEN NICHTHOMOGENEN FELDE

Von V. KUPRADZE

(Vorgelegt von I. M. Vinogradow, Mitglied der Akademie, d. 4. VI. 1937)

In einer früheren Note (1) des Verfassers wurde die Aufgabe der Diffraktion um ein ebenes Hindernis von einer beliebigen Form, ohne Ecken, auf die Lösung von zwei einfachen Integralgleichungen zurückgeführt. Aus der ersten Gleichung wird die z-Komponente des elektrischen Bestandteiles des Feldes, aus der zweiten die z-Komponente des magnetischen Vektors des Feldes bestimmt. Eine vollständige Untersuchung der ersten Gleichung wurde bereits früher an einer anderen Stelle gegeben (2). In der vorliegenden Note soll eine Untersuchung der zweiten Gleichung stattfinden. Sie stellt eine «belastete» Integralgleichung dar, die nicht nur in der Diffraktionstheorie, sondern auch in anderen Problemen der mathematischen Physik eine grosse Rolle spielt.

Zu dieser Gleichung gelangt man bei der Lösung der folgenden Aufgabe (1):

Es ist eine Funktion U zu bestimmen, die den folgenden Bedingungen genügt:

a) der Gleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + S^2(M)\,U \equiv \Delta U + S^2(M)U = 0$;

b) $U_i = U_a$, $\frac{1}{K_i^2}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_i = \frac{1}{K_a^2}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_a$ am Rande (C);

c) der Ausstrahlungsbedingung $\lim\limits_{R\to\infty} \sqrt{R}\left(\frac{\partial U}{\partial R} + iK_a U\right) = 0$ und der Forderung der Beschränktheit des Integrals $\int\limits_{(\Sigma)} \sqrt{R}\,|U|\,ds$;

d) der Bedingung $U \equiv f(x, y)$ für $(S) \equiv 0$.

Dabei bedeutet (S) ein Gebiet, das von einer geschlossenen Kurve (C) mit einer sich stetig drehenden Tangente berandet ist, R — den Radius eines genügend grossen Kreises mit dem Mittelpunkt in der Nähe von (S), die Indices i und a weisen auf die Grenzwerte bei der Annäherung an einen Punkt von (C) von innen und von aussen hin, n — die äussere Normale, M — einen laufenden Punkt der Ebene, $f(x, y)$ — eine vorgege-

bene Funktion, die überall der Differentialgleichung $\Delta f + K_a^2 f = 0$ genügt. Schliesslich ist

$$S^2(M) = K_i^2 = \frac{\varepsilon_i \mu_i \omega^2 + i\mu_i \sigma_i \omega}{c^2}, \quad \text{wenn } M \subset (S),$$

$$= K_a^2 = \frac{\varepsilon_a \mu_a \omega^2}{c^2}, \quad \text{wenn } M \subset (S),$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_i^2} - \frac{1}{K_a^2}\right), \quad \text{wenn } M \subset (C),$$

ε_i, μ_i, σ_i, ε_a, μ_a, ω, c — vorgegebene reelle Konstanten sind. Die erwähnte Integralgleichung besitzt die folgende Gestalt:

$$U(M) = \frac{S^2(M)}{4i} \frac{K_a^2 - K_i^2}{K_i^2 K_a^2} \left\{ -K_a^2 \iint_{(S)} U(P) H_0^{(2)}(K_a r)\, d\sigma_p - \right.$$

$$\left. - \int_{(C)} U(S) \frac{\partial}{\partial n_s} H_0^{(2)}(K_a r)\, ds \right\} + \frac{S^2(M)}{K_a^2} \cdot f(M), \tag{1}$$

r bedeutet den Abstand zwischen M und P, $H_0^{(2)}(K_a r)$ — die Hankelsche Funktion zweiter Art und nullter Ordnung.

Die (1) entsprechende homogene Gleichung wird mit (1°) bezeichnet. Wir wollen beweisen, dass bei reellen K_a die Gleichung (1°) nur die identisch verschwindende Lösung besitzt. Bekanntlich ist $U^*(M) = \Re(e^{i\omega t} \cdot U)$ eine Lösung der Telegraphengleichung:

$$\Delta U^* = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} + \frac{\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial U^*}{\partial t}. \tag{2}$$

Bilden wir den Ausdruck

$$E = \frac{1}{2} \frac{1}{S^2(M)} \left\{ \left(\frac{\partial U^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U^*}{\partial y}\right)^2 + \frac{\varepsilon\mu}{c_a^2} \left(\frac{\partial U^*}{\partial^2}\right)^2 \right\}, \tag{3}$$

die dem Ausdruck für die Energie analog ist.

Dem Satz über die Erhaltung der Energie entsprechend, ist die Änderung der totalen Energie in (S) der Summe der durch (C) durchströmenden Energie und Jouleschen Wärme gleich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} E d\sigma = -\int_{(C)} P_n\, ds - \iint_{(S)} \frac{\mu_i - \sigma_i}{S^2(M) c^2} \left(\frac{\partial U^*}{\partial t}\right)^2 ds. \tag{4}$$

Aus

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{S^2(M)} \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial x} \frac{\partial^2 U^*}{\partial x \partial t} + \frac{\partial U^*}{\partial y} \frac{\partial^2 U^*}{\partial y \partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial U^*}{\partial t} \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} \right.$$

unter der Verwendung von (3) kann man leicht einsehen, dass

$$\iint_{(S)} \left[\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\mu_i \sigma_i}{S^2(M) c^2} \left(\frac{\partial U^*}{\partial t}\right)^2 \right] d\sigma = \frac{1}{S^2(M)} \iint_{(S)} \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial t} \operatorname{grad} U^* \right\} d\sigma$$

und folglich ist auf Grund von (4) und Formel von Gauss:

$$P = \frac{1}{S^2(M)} \frac{\partial U^*}{\partial t} \operatorname{grad} U^*. \tag{5}$$

Wir schreiben jetzt die Gleichung (4) für den Aussenraum, der von den Kurven (C) und (Σ) begrenzt ist:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(\Omega)} E d\sigma = -\int_{(C)} P_n\, ds - \int_{(\Sigma)} P_n\, ds. \tag{6}$$

Da das äussere Medium ein Dielektrikum bildet, fehlt hier das der Jouleschen Wärme entsprechende Glied.

Unter Berücksichtigung von (5), der Bedingung b) und der Entgegenseitigkeit der Stromvektoren P_n längs (C) in (4) und (6), erhalten wir, indem wir (4) und (6) addieren:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(S+\Sigma)} E d\sigma = -\int\limits_{(\Sigma)} P_n\, ds - \frac{\mu_i \sigma_i}{S^2(M)\, c^2}\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial U^*}{\partial t}\right)^2 d\sigma. \tag{7}$$

Setzen wir $U = \varphi + i\psi$, so erhalten wir $U^* = \varphi\cos\omega t + \psi\sin\omega t$, woraus in Verbindung mit (5) folgt:

$$P_n = \frac{\omega}{K_a^2}(\psi\cos\omega t - \varphi\sin\omega t)\left(\cos\omega t\,\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \sin\omega t\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\right).$$

Aus der ersten Bedingung c) folgt

$$\lim_{R\to\infty}\sqrt{R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - K_a\psi\right) = 0,\quad \lim_{R\to\infty}\sqrt{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n} + K_a\varphi\right) = 0, \tag{8}$$

überdies gilt offenbar

$$P_n = \frac{1}{K_a^2}\Big\{K_a\,\omega\,(\varphi\sin\omega t - \psi\cos\omega t)^2 -$$

$$-\,\omega\,(\varphi\sin\omega t - \psi\cos\omega t)\Big[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - K_a\psi\right)\cos\omega t + \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} + K_a\varphi\right)\sin\omega t\Big]\Big\}.$$

Indem wir diese letzte Formel in (7) einsetzen, finden wir, gemäss (8) und der zweiten Bedingung c):

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(S+\Sigma)} E d\sigma < 0.$$

Andererseits kann die Energie des stationären Zustandes keine abnehmende Funktion der Zeit sein; indem wir die in der früheren Note des Verfassers (3) durchgeführte Betrachtungen wiederholen, finden wir, dass $U \equiv 0$, w. z. b. w.

Da (1) keine übliche Fredholmsche Integralgleichung ist, können wir aus dem Eindeutigkeitssatz den Existenzsatz nicht folgern; doch erlaubt der Eindeutigkeitssatz von der Gleichung (1) zu einer äquivalenten Fredholmschen Integralgleichung mit einer einzigen Lösung zu übergehen, was unmittelbar den Existenzsatz für (1) ergibt. Damit diese Reduktion möglich ist, ist es notwending, dass die Gleichung

$$U(M) = \frac{S^2(M)}{4i}\,\frac{K_i^2 - K_a^2}{K_i^2}\iint\limits_{(S)} U(P)\, H_0^{(2)}(K_a r)\, d\sigma_P$$

eine einzige Lösung $U \equiv 0$ besitze. Es ist leicht zu ersehen, dass man diesen Satz durch eine geringfügige Modifikation des oben angegebenen Beweises des Eindeutigkeitssatzes, erhält.

Wie man diese Reduktion auf eine Fredholmsche Integralgleichung durchführt, war ausführlich in einer meiner (4) früheren Note besprochen.

Für die effektive Lösung (1) kann mann die entsprechende Fredholmsche Gleichung verwenden; zwecks der Vereinfachung der numerischen

Rechnungen ist es jedoch zweckmässiger (1) unmittelbar mit Hilfe der bekannten Approximationsmethoden der Integralgleichungstheorie zu verfahren. Unsere Untersuchung zeigt die vollständige Anwendbarkeit dieser Methoden.

Mathematischer Institut
der Georgischen Filiale der
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Tbilisi.

Eingegangen
d. 4. VI. 1937.

ZITIERTE LITERATUR

[1] C. R. Acad, Sci. URSS, I (X) № 1 (78) (1936). [2] Transaction Tbilissien Mathemat. Inst., 1 (1937). [3] C. R. Acad. Sci. URSS, I, № 2 (1934). [4] C. R. Acad. Sci. URSS, XVI, № 1 (1937).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

GEOPHYSIK

ÜBER DIE BESTIMMUNG DER LOTABLENKUNG AUS DEN ANOMALIEN IM HORIZONTALGRADIENTEN DER ERDSCHWERE

Von N. K. MIHAL

(Vorgelegt von S. I. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 2. VI. 1937)

Im vorgehenden Artikel «Über die Bestimmung der Geoidfigur aus den Anomalien im Horizontalgradienten der Erdschwere» (1) haben wir eine Formel ermittelt, welche die Abweichung des Geoids vom Niveauellipsoid gibt, falls wir die Anomalien im Horizontalgradienten der Schwerkraft über der ganzen Erdoberfläche für bekannt ansehen.

Diese Formel lautet:

$$N = \frac{R^2}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial \Delta g}{\partial s} H(\psi)\, d\lambda\, d\psi, \tag{1}$$

wobei:

$$H(\psi) = \sin^2 \frac{\psi}{2} \left\{ -\frac{4}{\sin \frac{\psi}{2}} + 5 + 6 \sin \frac{\psi}{2} - 7 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \right.$$

$$\left. + 6 \cos^2 \frac{\psi}{2} \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right\},$$

$\frac{\partial \Delta g}{\partial s}$ die Anomalie im Horizontalgradienten in Richtung des maximalen Anstiegs von ψ bedeutet.

Im vorliegenden Artikel beabsichtigen wir, Formeln abzuleiten, welche die Berechnung der Lotablenkung aus den obenerwähnten Daten ermöglichen.

Hierzu wollen wir Formel (1) benutzen, wo wir das Doppelintegral durch ein Flächenintegral ersetzen.

Auf diese Weise erhalten wir:

$$N = \frac{R^2}{4\pi\psi} \int \frac{\partial \Delta g}{\partial s} \frac{H(\psi)}{\sin \psi} d\sigma, \tag{2}$$

wobei $d\sigma$ das Flächenelement der Einheitskugel ist.

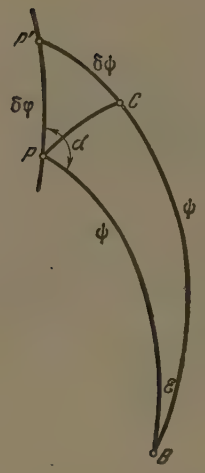
Die Aufgabe, die Lotablenkung ξ in der Meridianfläche, sowie η in der Fläche des ersten Vertikals zu bestimmen, besteht bekanntlich in der Ermittelung von $\frac{\partial N}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$, wo die Verhältnisse dieser Werte

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi}, \\ \eta \cos \varphi &= \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

bekannt sind, wobei φ und λ die geographischen Koordinaten des Punktes P, in welchem die Lotablenkung zu bestimmen ist, bedeuten.

Um $\frac{\partial N}{\partial \varphi}$ zu bestimmen, betrachten wir das sphärische Dreieck $PP'B$ (Abbildung), wobei bedeuten: P und P' zwei Punkte, die sehr nahe nebeneinander auf dem Meridianbogen liegen und B — den Punkt auf der Kugel mit den laufenden Koordinaten φ und λ.

Nun ermittlen wir die Variation des Integrals (2) bei Verschiebung des Punktes P in den Punkt P'.



Wir haben:

$$\delta N = \frac{R^2}{4\pi\gamma} \int \left\{ \frac{H(\psi)}{\sin\psi} \delta \frac{\partial \Delta g}{\partial s} + \frac{\partial \Delta g}{\partial s} \delta \frac{H(\psi)}{\sin\psi} \right\} d\sigma. \qquad (4)$$

Um die Variation von $\frac{\partial \Delta g}{\partial s}$ zu bestimmen, benutzen wir die bekannte Formel:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial p} = \frac{\partial \Delta g}{\partial s} \cos\varepsilon + \frac{\partial \Delta g}{\partial s_1} \sin\varepsilon, \qquad (5)$$

wobei $\frac{\partial \Delta g}{\partial p}$, $\frac{\partial \Delta g}{\partial s}$ und $\frac{\partial \Delta g}{\partial s_1}$ — die Anomalien in den Horizontalgradienten der Schwerkraft im Punkt B, in Richtung der Tangente an den Bogen $P'B$, der Tangente an den Bogen PB und in der senkrechten Richtung zur Tangente an den Bogen $P'B$ bedeuten.

Bei genügend kleinen Werten von ε, entsprechend der obenangeführten Formel, ergibt sich für die Variation:

$$\delta \frac{\partial \Delta g}{\partial s} = \frac{\partial \Delta g}{\partial p} - \frac{\partial \Delta g}{\partial s} = \frac{\partial \Delta g}{\partial s_1} \varepsilon. \qquad (6)$$

Was die Variation $\delta \frac{(H\psi)}{\sin\psi}$ betrifft, so kann man sie ohne weiteres hinschreiben:

$$\delta \frac{H(\psi)}{\sin\psi} = \left\{ -\frac{H(\psi)}{\sin^2\psi} + \frac{1}{\sin\psi} - \frac{\partial H(\psi)}{\partial \psi} \right\} \delta\psi. \qquad (7)$$

Wir haben noch ε und $\delta\psi$ durch $\delta\varphi$ auszudrücken.

Deswegen wollen wir das Dreieck $PP'C$, wo PC die Senkrechte von der Ecke P auf die Seite $P'B$ ist, betrachten. Aus diesem Elementardreieck ermitteln wir:

$$\delta\psi = -\delta\varphi \cos\alpha. \qquad (8)$$

Wenn wir das sphärische Dreieck $PP'B$ betrachten, finden wir, dass bei kleinen Werten von ε und $\delta\varphi$

$$\varepsilon = \frac{\sin\alpha}{\sin\psi} \delta\varphi. \qquad (9)$$

Wenn wir die Formeln (6) und (7) in (4) einsetzen und die Formeln (8) und (9) in Betracht ziehen, erhalten wir:

$$\frac{\delta N}{\delta \varphi} = \frac{R^2}{4\pi\gamma} \int \left\{ \frac{d\Delta g}{ds_1} \frac{H(\psi)}{\sin^2\psi} \sin\alpha + \frac{\partial \Delta g}{\partial s} \left[\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi} H(\psi) - \frac{1}{\sin\psi} \frac{\partial}{\partial\psi} H(\psi) \right] \cos\alpha \right\} d\sigma.$$

Indem wir $d\sigma$ durch $\sin\psi d\psi d\alpha$ ersetzen, erhalten wir:

$$\lim_{\delta\varphi \to 0} \frac{\delta N}{\delta \varphi} = \frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{R^2}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial \Delta g}{\partial s_1} Q(\psi) \sin\alpha + \frac{\partial \Delta g}{\partial s} F(\psi) \cos\alpha \right\} d\alpha d\psi,$$

wo

$$\left.\begin{aligned} Q(\psi) &= \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\left\{-\frac{2}{\sin\frac{\psi}{2}}+\frac{5}{2}+3\sin\frac{\psi}{2}-\frac{7}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}+\right. \\ &\left.+3\cos^2\frac{\psi}{2}\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right\}, \\ F(\psi) &= \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\left\{-7\sin\frac{\psi}{2}-\frac{11}{2}+\frac{39}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}+\right. \\ &\left.+6\sin^3\frac{\psi}{2}-13\sin^4\frac{\psi}{2}-6\cos^2\frac{\psi}{2}\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} (10)$$

Auf diese Weise finden wir, dass

$$\frac{\partial N}{\partial\lambda}=\frac{R^2}{4\pi\gamma}\cos\varphi\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{\partial\Delta g}{\partial s_1}Q(\psi)\cos\alpha-\frac{\partial\Delta g}{\partial s}F(\psi)\sin\alpha\right\}d\alpha d\psi.$$

Setzen wir dies in Formeln (3) ein, so erhalten wir schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{\partial\Delta g}{\partial s_1}Q(\psi)\sin\alpha+\frac{\partial\Delta g}{\partial s}F(\psi)\cos\alpha\right\}d\alpha d\psi, \\ \eta &= \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{\partial\Delta g}{\partial s_1}Q(\psi)\cos\alpha+\frac{\partial\Delta g}{\partial s}F(\psi)\sin\alpha\right\}d\alpha d\psi. \end{aligned}\right\} (11)$$

Es wird wohl bequemer sein, für Berechnungen die Summe und die Differenz der Formeln (11) zu nehmen. In diesem Falle bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} \xi+\eta &= \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{\partial\Delta g}{\partial s_1}Q(\psi)+\frac{\partial\Delta g}{\partial s}F(\psi)\right\}(\sin\alpha+\cos\alpha)d\alpha d\psi, \\ \xi-\eta &= \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{\partial\Delta g}{\partial s_1}Q(\psi)-\frac{\partial\Delta g}{\partial s}F(\psi)\right\}(\sin\alpha-\cos\alpha)d\alpha d\psi. \end{aligned}\right\} (12)$$

Das sind die Formeln, welche die Lotablenkung aus den Anomalien im Horizontalgradienten der Erdschwere angeben, Anomalien welche mit Hilfe des Variometers von R. Eötvös ermittelt werden können.

Bau-Ingenieur Institut.
Kharkov.

Eingegangen
d. 15. V. 1937.

ZITIERTE LITERATUR

[1] C. R. Acad. Sci. URSS, XVI, 1 (1937).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

ZOOLOGY

FUNDAMENTAL REGULARITIES IN THE DISTRIBUTION OF THE DENDROPHILOUS LEPIDOPTEROUS FAUNA (*MACROLEPIDOPTERA*) IN THE USSURI PROVINCE

By A. I. KURENCOV

(Communicated by S. A. Zernov, Member of the Academy, 7.V.1937)

In the Ussuri Province one can distinguish five main ecological groups of the lepidopterous fauna, which are associated with the principal types of forest vegetation, namely: the mixed and broad-leaved forest, the fir-spruce taiga, the larch forests, and the highland shrub belt.

The mixed forests, attaining their greatest variety in the southern portion of this province, comprise, in addition to certain coniferous trees (*Pinus koraensis*, *Abies holophylla*), many broad-leaved species (*Tilia manshurica*, *Juglans manshurica*, *Betula costata*, *Fraxinus manshurica* etc.) as well as many shrubs and lianas. In the southern regions, these forests occupy valleys and mountain slopes up to altitudes of 700—800 m above sea level. Northward their abundance gradually decreases, and from about lat. 47° N. along the coastal belt and about lat. 50° N. in the Amur Basin, these forests are only to be found in sheltered valleys, their specific composition being also much poorer.

The fir-spruce taiga, consisting mainly of *Picea jezoensis* and *Abies nephrolepis*, is widespread in the more northern areas of the province and extends southwards along the Sikhote-Aline Mountain Ranges, rising here to altitudes of 1200—1500 m above sea level. The shrub belt, comprising mainly growths of *Pinus pumila*, is developed in the mountains beginning from 1500—1700 above sea level. The broad-leaved (oak) forests and many larch forests (*Lahrix dahurica* on gentle slopes) usually occur as derivatives: the former—of mixed forests, the latter—of the fir-spruce taiga. They usually appear on the burnt-out areas of primitive forests.

Mixed forests are the most important ecological factor in the province. They not only yield timber of the highest quality (mainly, the conifers), but also contain a number of valuable species which may be utilized in many branches of industry, as, for instance, the cork-tree (*Phellodendron amurense*), various deciduous hardwood and softwood trees (the hornbeam, many species of maple, alder and lime-tree), aromatic trees (*Phellodendron amurense*, *Schizandra chinensis*), vitamin-bearing trees (*Actinidia colomicta*), etc. The study of the lepidopterous fauna of these forests is of great importance. Below, the author briefly discusses the results of his five-year's work on the problem of the distribution of this fauna in the Ussuri Province. The general distribution of this fauna in the Ussuri Province will enable

us to separate it into Palaearctic* species proper and the East-Asiatic ones.

The Palaearctic species are the enemies of those trees and shrubs which are the analogues in the Ussuri Province of the trees of the broad-leaved forests of Central Europe, or else are replaced here by the corresponding forms. These species can, in their turn, be divided, according to the peculiarities of their distribution, into three groups:

a) Species with interrupted distribution (e. g., *Stauropus fagi* L., *Notodonta dromedarius* L., *Bapta temerata*, *Limenites camilla*, etc.). Besides the Ussuri Province, these species occur in Central and Southern Europe, after a gap comprising the whole of Siberia. Here belong the species associated exclusively with the deciduous trees absent from Siberia. There are no pests in this group.

b) Species extending from the Ussuri Province throughout the whole of Siberia to Europe along the southern boundary of the taiga zone, some of them penetrating far southwards. They are most frequently polyphagous pests of deciduous trees (*Malacosoma neustria*, *Limantria dispar*, *Ennomos autumnaria*, *Stilpnocia salicis*, etc.).

c) Species close to the preceding group in their general distribution, but passing through the more northern part of the taiga zone of Eurasia. These species are biologically associated partly with the conifers (e. g. *Limantria monacha*, *Boarmia riberata*) and partly with those deciduous trees which are associates of the coniferous forests of the Far East and which extend far northwards (e. g. *Cidaria bicolorata*, *Arichanna melanaria*, *Abraxas grossulariata*, and several others).

The East-Asiatic species are primarily enemies of the trees distributed over the East-Asiatic area, and then of the trees wide-spread through the northern part of Eurasia or of the trees replacing European species in the Ussuri Province. According to their distribution, these *Lepidoptera* species fall into the following groups:

a) Species distributed over the whole of China from the Himalayas to the Ussuri Province. They are all biologically associated with deciduous trees. A number of them occur in great quantities, and some of them (the polyphagous species) penetrate into orchards (*Cistidia couaggaria*, *Illiberis sinensis*, *Monema flavescens*, *Parasa hilarata*).

b) Species distinguished by interrupted areas of distribution. Besides the Ussuri Province, they also occur in Western China and North Japan. With the exception of *Boarmia angulifera* and *Cidaria comis*, which develop on coniferous trees, the majority of the species of this group are biologically associated with deciduous trees (*Oreta pulchripes*, *Uropia metidulodina*, *Lygris ludovicaria*, *Iotophora admirabilis* etc.). Exept *Gandaritis fixeni* which is of very frequent occurrence, these species are of but small importance in forestry.

c) Species of the Manchuro-Japanese cycle of distribution. This group is fairly large. A considerable part of these species are pests of the vine, the apple-tree, the walnut, etc. (e. g. *Illiberis tenuis*, *Parasa sinica*, *Cifuna eurydice* etc.).

d) Ussuri-Manchurian species.

e) Ussuri-Japanese species. Besides species, developing on deciduous trees (*Marumba jankovskii*, *Sphecodina caudata*, *Ephesia dissimilis*, and many others), both these goups comprise a certain number of forms associated with conifers (*Garaeus mirandus mirificus*, *Bupalus vestalis*, and some others).

---

* Some general palaearctic species are replaced in the Ussuri Province by geographical races.

Only a few butterflies have been recorded up till now as pests of deciduous trees (*Thecla herzi*, *Erannis golda*, *Parasa hilarata*).

f) Endemic species. Of butterflies associated exclusively with conifers *Boarmia amoenaria* and *Cidaria* sp. n. are the only ones in this group. The rest develop on deciduous trees (*Zephyrus betulina Dasychira olga*, *Pygaera curtuloides*, *Mirina christophi*, etc.). No species occurring in great quantities.

The palaearctic species with uninterrupted distribution areas, under local conditions, increase northwards, both qualitatively and quantitatively, and often extend into the zone of the fir-spruce taiga, while the species with interrupted distribution areas do not extend far northwards, occur usually in the south only and are biogenetically associated exclusively with mixed and broad-leaved forests. The nature of the distribution of the Palaearctic elements indicates the double connection of the Ussuri dendrophylous fauna with that of the Palaearctic. The geologically earlier connection has left its trace in the Ussuri Province in the form of disjunct areas of distribution of certain species. The connection through species with continuous areas of distribution is the result of later migrations.

The East-Asiatic species also display characteristic peculiarities in their distribution in the Ussuri Province. Two groups should be distinguished among them. One group, comprising a number of species with interrupted areas of distribution, some Japano-Ussurian species and a part of the endemics, find more favourable conditions in the middle and coastal parts of the territory. They become rarer both northwards and southwards. Ecologically they are associated with highland mixed forests, and many of them are permanent inhabitants of the fir-spruce taiga. The second group, composed chiefly of species of mixed valley forests, shows three varieties in its distribution:

1) Species occurring exclusively in the southernmost regions of this territory, their boundary on the coastal side lying along lat. 43° N., and in the basin of the Ussuri, along lat. 45° N. Some of these species develop on trees which also do not occur east and north of the boundary indicated. Others cross this boundary, apparently under the influence of climatic factors.

2) Species of wider occurrence in this province and extending along the coastal region to lat. 45° N., and in the Amur basin to lat. 49° N.

3) Species reaching to lat. 50° N. in the Amur basin and to lat. 46° N. along the coast. They already contain a considerable percentage of boreal species. Some species penetrate still farther to the north-east of this line; but this is no longer the fauna of the mixed forests, but merely a penetration of its representatives into the fir-spruce taiga. The NW-SE trend of the boundary marking the difference in the distribution of the fauna on the two sides of the Sikhote-Alin (which is covered by fir-spruce taiga) shows the influence of the cold waters of the Japan Sea off our coast and of the Tartar Straits. The influence of the sea is also noticeable in the distribution of the fauna of the mixed forests along the coast. Between lat. 44° N. and 47° N., this fauna is here developed only in the regions of the middle courses of the rivers, whilst the coastal belt exhibits many boreal species, and nearer the Sikhote-Alin range begins the region of the predominance of the coniferous forest fauna.

The differences in ecology and distribution between the above-mentioned two groups of the East-Asiatic species are most probably an indication of the existence of two elements among them, the development and invasion of which into the Ussuri Province were not simultaneous and occurred along different routes.

The species with small or interrupted areas of distribution are comparatively old constituents of the fauna and appear to be at present in a state of depression, displaying as they do no tendency to mass reproduction. On the other hand, those species whose areas of distribution have been developing for a long time without any marked disturbances, display polyphagy, outbursts of mass reproduction, powers of mastering new habitats and of extending their area of distribution.

Mountain Taiga Station.
Far East Branch of the Academy
of Sciences of the USSR.

Received
28. XII. 1936.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

ZOOLOGY

WEIGHING OF WHALES*

By B. A. ZENKOVIČ

(Communicated by S. A. Zernov, Member of the Academy, 11. VI. 1937)

The necessity of calculating the weight of raw material processed on the whaler floating base-factory «Aleut» has urged me to work on methods for determining the average weight of whales by means of some sort of simple formula.

In order to obtain the initial point in evolving this formula I first of all organized the weighing of whales complete with the aid of such forces and technical means which were placed at my disposal by the Captain A. I. Dudnik, Director of the whaling flotilla. Each weighed whale was carefully measured, enabling me, with the aid of the figures obtained as a result of weighing and measuring, to approach the problem of evolving a method of simplified and, as far as possible, exact weighing of the raw material, i. e. the entire carcass.

With this object the whale carcass was cut into sections, weighing from 30—50 kilograms up to 1—2 tons, this permitting to simultaneously obtain the weight of separate sections of the carcass, which has its practical and scientific value.

I quote here the data obtained in various species of whales, after which I shall deal with the projecting of a method for calculating the weight of the carcass of the whale. I consider it necessary to add that the present work is the first endeavour to commence treating this problem and does not aspire to complete clarity in view of the insufficient quantity of material which I have so far dealt with.

I. Herring Whales (Finback) (*Balaenoptera physalus* L.)

In all, three whales were weighed, two females and one male. I must recall here that the females of herring whales are larger than the males and generally more plump and fat.

Zoological length was taken from the tip of the snout to the fork of the tail blades. Girth measurements were taken immediately behind the pectoral fins in such a manner that the measuring tape passed over the spot where they joined the carcass; the greatest height was measured after the head had been removed, at the spot passing through the section at the atlas: thickness of

* From materials concerning the scientific research work conducted on the floating whaler base «Aleut» in 1932—1936.

the blubber was measured at a given spot, on the side, at the parallel of the center of the dorsal fin. The remaining measurements are not given here.

The data obtained in weighing herring whales are set forth in Table 1.

Table 1

Weighing of Herring Whales (*B. physalus* L.)

No	Denomination of part weighed	Finback No 86, 1933	Finback No 110, 1933	Finback No 132, 1936
		Weight in kilograms		
1	Blubber	7753.0	6326.0	2814.5
2	Belly	5516.0	5180.0	3702.5
3	Tongue	1830.0	1558.0	956.0
4	Flesh	23700.0	22511.0	11290.0
5	Vertebrae	6116.0	5483.0	3424.0
6	Skull	2055.0	1647.0	3314.0*
7	Lower jaw	1322.0	1161.0	1292.0
8	Ribs	1480.0	1356.0	3 711.0*
9	Pectoral fins	110.0	97.0	
10	Whalebone with flesh	516.0	496.0	151.0**
11	Viscera	2419.0	2272.0	2940.0
12	Heart	148.0	142.0	161.0
13	Liver	378.0	371.0	—
14	Foetus	457.5	—	—
15	Tail blades	—	—	240.0
	Total	53800.5	48600.0	33996.0

Characteristics of the weighed finbacks (herring whales): No 86, finback ♀, zoological length—20 m 80 cm, girth at pectoral fins—8 m 50 cm, greatest height—2 m 80 cm, layer of blubber—7 cm thick, gravid with embryo—3 m 90 cm in length. Killed on August 13th, 1933.

No 110, finback ♀, zoological length—19 m 90 cm, girth at pectoral fins—8 m 50 cm, greatest height—270 cm, layer of blubber—6.5 cm thick. Killed on August 24th, 1933.

No 132, finback ♂, zoological length—18 m 85 cm, girth—7 cm 20 cm, greatest height—2.3 m, layer of blubber—6 cm. Killed off the Commandor Islands on June 13th, 1936.

It should be added here that finbacks No 86 and No 110, were killed towards the end of the summer, after they had been in the Bering Sea for nearly the whole season and had grown plump, No 86 moreover being gravid, and it is well known that gravid females always have more fat, whereas finback No 132 was killed at the beginning of the summer, when, apparently he had just recently returned from his wintering in the tropics and had not had the time to put on fat. Finbacks are very lean in the spring and beginning of the summer, growing more plump by the middle and towards the close of the summer.

The first two finbacks, furthermore, were females which are always larger and more plump than the males, and, in my opinion, belong to the American herd, as they had been caught in the northern part of the Bering Sea, whilst No 132, a male, probably belonged to the Asiatic herd, which has been so

* Much flesh on the skull and ribs.
** Weight of the baleen strips cut off.

hard hit by the whaling industry as to result in a noticeable short-growth below normal size and a certain leanness.

II. Humpback Whales (*Megaptera nodosa* Bon.).

Two whales, a male and a female, were weighed. Female humpback whales are likewise usually bigger and more plump than the males. The methods for measuring are as shown above for the herring whales.

No 143, humpback ♀, zoological length—13 m 90 cm, girth—9 m 40 cm, greatest height—310 cm, layer of blubber at a given spot—13.5 cm thick. Killed in the Bering Straits on September 10 th, 1933.

No 392, humpback, ♂, zoological length—12 m 92 cm, greatest height—290 cm.

Table 2

Weighing of Humpback Whales (*M. nodosa* Bon.)

No	Denomination of part weighed	Humpback No 143	Humpback No 328
		Weight in kilograms	
1	Blubber	5322	2847
2	Belly	3445	3734
3	Tongue		792
4	Flesh	9959	5788
5	Bones (vertebrae and ribs)	9627	6676
6	Pectoral fins	1000	1016
7	Skull	1605	2247 *
8	Lower jaw	1152	1103
9	Tail blades	—	910
10	Viscera	3876	2324
11	Whalebone with flesh (not cleaned)	388	—
12	Fat	—	443
	Total	32374	27880

Table 3

Weighing of Grey Californian Whale No 247 (*Rhachianectes glaucus* Cope)

No	Denomination of part weighed	Weight in kilograms	Remark
1	Blubber	9100.0	The bones were weighed with a certain quantity of flesh which it is difficult to estimate
2	Flesh	6729.0	
3	Head	1692.0	
4	Lower jaw	1265.0	
5	Tongue	1278.0	
6	Vertebrae	2441.0	
7	Ribs	3200.0	
8	Blades	526.0	
9	Pectoral fins	612.0	
10	Viscera	4493.0	
	Lungs 333		
	Heart 172		
	Intestines 1395		
	Liver and Kidneys 616		
	Other Viscera 1977		
11	Embryo	126.0	
12	Brain	4.376	
	Total	31466.376	

* Skull not cleaned, with baleen.

III. Grey Californian Whale (*Rhachianectes glaucus* Cope). One complete, female, grey whale was weighed during the 1936 season in order to determine, as near as possible, the precise weight. Her measurements follow:

No 247, August 19th, 1936, Grey Californian whale, zoological length—13 m 35 cm, thickness of blubber in a given spot—16 cm, in other spots, from 30 to 45 cm. Gravid with embryo 207 cm in length. Greatest height—270 cm.

Total weight of the carcass—31460 kg. The weight of separate parts of the carcass are given in Table 3.

Table 4

IV. Weighing of Sperm Whales (*Physeter catodon* Lin.)

No	Denomination of parts weighed	Sperm whale No 149 26 VI 1936	Sperm whale No 160 28 VI 1936
		Weight in kilograms	
1	Blubber	4955.0	12662.5
2	Spermaceti, liquid	620.0	5757.0
3	Areolar tissues	3358.0	7783.0
4	Fibrin—snout	623.0	2560.0
5	Flesh	5640.0	7679.5
6	Skull	1800.0	6087.0
7	Vertebrae	1985.5	3387.0
8	Lower jaw	320.0	880.0
9	Ribs	965.0	2147.0
10	Pectoral fins and blades	485.0	978.0
11	Pelvic bones	108.0	200.0
12	Pectoral bone	209.0	329.0
13	Caudal blades	314.0	715.0
14	Viscera	1282.0	2198.5
	Total	22664.5	53364.5
	Viscera:		
1	Heart	113.0	211.0
2	Lungs	161.5	317.0
3	Liver and Kidneys	331.0	368.0
4	Penis	88.0	106.0
5	Testes	10.5	16.5
6	Intestines	254.0	465.0
7	Other Viscera	323.5	716.0

Table 5

Weighing of a Bottle-nose (*Hyperoodon rostratus* Porot.)

No	Denomination of parts weighed	Bottle-nose No 81 Weight in kilograms
1	Blubber	5615.5
2	Flesh	1974.0
3	Ribs with flesh	460.0
4	Vertebrae, not cleaned	1872.0
5	Head (complete)	440.0
6	Pectoral fins	278.0
7	Viscera	399.0
		11038.5

Characteristics of the weighed sperm whales:

No 149 ♂, zoological length—13 m 45 cm, girth round pectoral fins 7 m 60 cm, greatest height—2.2 m, layer of blubber in a given spot—11.5 cm. Killed and weighed on June 26th, 1936.

No 160 ♂, zoological length—18 m, girth—9 m, greatest height—3 m, layer of blubber—12 cm. Killed and weighed on June 30th, 1936.

Characteristics of weighed bottle-nose.

No 84 ♀, zoological length—11 m 10 cm, girth—5 m 80 cm, greatest height—1 m 65 cm (in front of the dorsal fin), layer of blubber—12.5 cm.

With this limited material I endeavoured to calculate the weight of the whale carcass. G. Guldberg(1) the German savant, having no weighings of whales at his disposal, proposed the formula $V = \frac{PLD^2}{12}$, where V is the volume of the whale, for which he accepted a geometrical figure composed of two cones with equal foundations, D the diameter of the base of the cones or, the greatest height of the whale, L the sum of the height of both cones or, the zoological length, and P—an abstract number equal to 3.14. The height of the front cone—the head—is accepted as half of D. The volume of the whale, and hence, its weight, was identified with the volume (weight) of water displaced by the whale. This conception is fallacious, as the so-called striped whales generally sink after death and remain at the surface only in the event of their not having had the time to exhale the air from their lungs, which, with the size and power of the latter represent a considerable factor, which it would be erroneous to ignore.

The theoretical weight of whales obtained by means of Guldberg's formula never coincides with the actual weight, exceeding it several times over. Having effected the weighing of whales, I therefore used a more simple formula for calculating the weight in «the rough», suitable for all whaling occasions. The formula is as follows:

$$V = \frac{LD^2}{3} \quad \text{or} \quad V = \frac{LD^2}{4}$$

where L is the zoological length of the whales and D the greatest height.

Table 6

Practical and Theoretical Weight of Whales Weighed on Board, the Whaler «Aleut», 1933 and 1936

No	Catch No	Date of weighing	Species	Sex	Zool. length, m	Greatest height, m	Results of weighing, in kg	Formula	Weight of whale per formula
1	86	13 VIII 1933	Herring whale	♀	20.8	2.8	53801.5	$\frac{LD^2}{3}$	54357.0
2	110	24 VIII 1933	» »	♀	19.9	2.7	48600.0	»	48323.0
3	132	13 VI 1936	» »	♂	18.85	2.3	33996.0	»	33238.0
4	247	19 VIII 1936	Grey Whale	♀	13.35	2.7	31466.0	»	32440.0
5	149	26 VI 1936	Sperm »	♂	13.45	2.2	22664.0	»	21700.0
6	160	28 VI 1936	» »	♂	18.0	3.0	53364.5	»	54000.0
7	81	29 V 1936	Bottle-nose	♀	11.1	1.65	11380.0	»	10064.0
8	143	10 IX 1933	Humpback	♀	13.9	3.1	32374	$\frac{LD^2}{4}$	33395
9	328*	6 X 1935	»	♂	12.9	2.9*	27425	»	27122

* Height measured on a whale similar in size. Measuring and weighing of the whale was effected by N. P. Boev without indicating the height.

The formula $V = \frac{LD^2}{3}$ was found suitable for the herring whales (finbacks), the greys, sperm whales and bottle-nose, which I weighed and $V = \frac{LD^2}{4}$ for the humpback whales.

The comparative data obtained are set forth in Table 6.

Conclusions

I. It is necessary to weigh not less than three whales (at least of three ages) of each sex from the whaling catch, i. e. six specimens of each species in order to obtain a complete idea of the weight of whales and to evolve a conclusive formula.

2. The proposed formula is only suitable for very rough calculations and requires precising for age, plumpness and sex in accordance with the reasons stated above.

Zoological Institute.
Academy of Sciences of the USSR.
Leningrad.

Received
11. VI. 1937

REFERENCES

1 G. Guldberg, Forhen. Vid-Sel. Christiania, No. 3 (1907).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

EMBRYOLOGIE

DIE VERKNÖCHERUNG DES EXTREMITÄTENSKELETTS DER KIRGISISCHEN FETTSTEISSCHAFEMBRYONEN

Von E. ANDREJEVA

(Vorgelegt von I. I. Schmalhausen, Mitglied der Akademie, d. 9. VI. 1937)

Die Verkürzung der Extremitätenknochen bei den frühreifen Tieren hängt von der frühzeitigen Verknöcherung der Epiphysen und dem Anwachsen derselben an die Diaphyse der Knochen ab; hierauf weisen Hammond(2), Sanson(5) und andere Verfasser hin.

Hammond fügt (am Beispiel der Schafe) hinzu, dass die Tiere, die für die gegebene Rasse normale Grösse nur in dem Falle erreichen, wo sie in der Altersperiode zwischen dem Anwachsen der Epiphysen der Metapodien und dem Anwachsen der Epiphysen der anderen Knochen gute Ernährung und günstige Bedingungen haben. Hieraus folgt, dass die Feststellung des Zeitpunktes, zu dem dieser Prozess bei den verschiedenen Rassen der Schafe stattfindet, eine für uns wichtige Aufgabe ist. Die Kenntnis dieser Stadien kann für die Zootechnik von Nutzen sein, da sie uns dazu verhelfen könnte, die Züchtungseingriffe und Futternormen bei der Aufzucht der Lämmer zu regulieren.

Dem Prozess der Verknöcherung und des Anwachsens der Epiphysen der langen Knochen geht der komplizierte Prozess der allmählichen Verknöcherung der Extremitätenelemente voran. Das Studium dieses Prozesses berechtigt zu der Annahme, dass die bestehende zeitliche Reihenfolge der Verknöcherung einerseits den allgemeinen Gesetzmässigkeiten der Entwicklung und Differenzierung der Extremitäten unterliegt und andererseits mit der charakteristischen Bewegungsfunktion der Extremität bei dem gegebenen Tier, mit seinen spezifischen Eigentümlichkeiten verknüpft ist. Die Haustiere bilden ein sehr günstiges Material für derartige Untersuchungen, und die Vertiefung dieser Frage nach der Seite des Studiums verschiedener Rassen hin wird es ermöglichen, näher an die Aufklärung der möglichen Abweichungen in der Entwicklung der frühreifen Tiere im Zusammenhang mit dem allgemeinen Prozess der Beschleunigung derselben in der Differenzierung heranzutreten.

Die Verknöcherung der Skelettelemente ganzer Embryonen ist am bequemsten auf Röntgenogrammen, die ein volles Bild eines bestimmten Stadiums geben, zu studieren.

Die Analyse des Verknöcherungsgrades des Skelettes der Extremitäten von zwölf Stadien der embryonalen Entwicklung des Fettsteisschafes beruht auf dem Studium von Röntgenogrammen, die von W. P. Kasanzev im Labo-

ratorium für Strahlenenergie der Biogruppe der Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurden.

Zur Prüfung der erhaltenen Resultate wurde auf dieselben Objekte die Methode der Alizarinfärbung angewandt, die mit voller Anschaulichkeit die erhaltenen Resultate bestätigte und in einzelnen Fällen aufklärte.

Um festzustellen, in welchem Stadium des embryonalen Lebens die ersten Verknöcherungszentren in den Extremitäten auftreten, wurden sehr junge Embryonen untersucht. Es konnte konstatiert werden, dass bei dem Embryo № 1a, dessen Gesamtlänge 61 mm betrug* (etwa 38—40 Tage alt), alle Knochen der Extremitäten noch ganz aus Knorpel bestanden. Bei dem Embryo № 1a (Gesamtlänge etwa 7 mm länger), der ungefähr 2—3 Tage älter war, werden bereits Verknöcherungszentren in Gestalt kaum merklicher Bezirke im Schulterblatt, der Achsel, der Speiche, dem Ellbogenknochen, dem Oberschenkel und dem grossen und kleinen Schienbeinknochen bemerkt.

Der Beginn der Verknöcherung fällt ungefähr mit dem Auftreten der primären Keime der Grannenhaare im Gebiet zwischen den Augen zusammen (nach den Angaben von A. A. Terentjeva).

Hier muss noch gleich hervorgehoben werden, dass die Verknöcherung, ebenso wie die allgemeine Differenzierung der hinteren Extremitäten hinter derjenigen der vorderen zurückbleibt; die Verknöcherungszentren der hinteren Extremitäten sind in den ersten Entwicklungsstadien schwächer ausgedrückt. Erst beim Embryo 1c, 88 mm (etwa 45 Tage alt) lassen sich Verknöcherungszentren in den metacarpalen und metatarsalen Knochen finden. Die Untersuchung der Embryonen 1a, 1e und 1 zeigt das allmähliche Anwachsen der Verknöcherungszentren; erst beim Embryo № 2, 133 mm (etwa 55 Tage alt) gelingt es neue Verknöcherungszentren zu finden und zwar kaum merkliche Inselchen in der I und III Phalanx des III und IV Fingers der vorderen und hinteren Extremitäten. Beim Embryo № 4, 62 mm (etwa 65 Tage alt) muss als neues Verknöcherungselement die II Phalanx der obenerwähnten Finger bezeichnet werden; im übrigen ist nur ein Anwachsen der Verknöcherungsgebiete zu konstatieren. Diese Neubildung erscheint fast gleichzeitig mit dem Auftreten der ersten Anlagen der Daunenhaare im interokularen Raum (aus den Angaben von A. A. Terentjeva).

Der Embryo № 6, 250 m (etwa 70—75-tägig) zeigt eine neue Verknöcherung im Gebiet der hinteren Extremitäten: an der Stelle des Calcaneus befindet sich ein ziemlich grosser, verlängerter Knochenbezirk.

Bei dem Embryo № 7, 310 mm (etwa 80-tägig), kann man ausser der plötzlichen Vergrösserung der Körpermasse eine ganze Reine neuer Verknöcherungen finden: gut zu bemerken ist der runde Bezirk des Astragalus und kaum merklich sind zwei Zentren im Gebiet des Carpus. Durch detaillierte Untersuchung konnte der Verknöcherungskern im Os carpi 4 und im Os carpi 2+3 gefunden werden (das erste Zentrum ist grösser als das zweite).

Im Embryo № 8, 380 mm (etwa 100-tägig), können als neue Verknöcherunsgszentren zwei Kerne im Os centrale + tassi 4 erwähnt werden; in den Karpalknochen ist ein Verknöcherungszentrum im Os radiale hinzugekommen.

Embryo N 9, 455 mm (etwa 4 Monate alt). Der grosse Zeitraum der die Embryonen № 8 und 9 voneinander trennt, ermöglicht das Auftreten einer ganzen Reihe ziemlich grosser Veränderungen. Die Diaphysen der Knochen der Extremitäten sind fast vollständig verknöchert und haben ihre charakteristischen Formen erhalten. Die Verknöcherung des Schulterblattes hat sich bis zum Unterschulterblattknorpel erstreckt und hat den Hals und das ganze Gebiet bei der Gelenkgrube erfasst.

---

* Weiterhin wird die Millimeterzahl ebenfalls die Gesamtlänge des Embryos angeben (von der Oberlippe bis zur Schwanzwurzel, mit einem Band gemessen).

Neu sind noch zwei Verknöcherungszentren der Karpalknöchelchen der proximalen Reihe und ein kaum merklicher Verknöcherungsbezirk der distalen Epiphyse der Speiche. In der hinteren Extremität kann man ein neues grosses Verknöcherungszentrum der distalen Epiphyse des Oberschenkels finden. Ausserdem zeichnet sich im Hinterbein deutlich ein zweites Verknöcherungszentrum der Os centrale+tarsi 4, sowie des Os tarsi 2+3 ab.

Das Studium der Verknöcherung des Extremitätenskelettes beim Fettsteisschaf im embryonalen Zustande ermöglicht eine Reihe von Etappen festzustellen, die den allmählichen Ersatz der Knorpelelemente durch Knochenelemente charakterisieren. Als e r s t e Etappe kann man die Verknöcherung der Diaphysen der langen Knochen der Extremitäten, sowie des Schulterblattes betrachten. Hierbei gelang es, das Stadium zu finden, in dem alle Knochen mit Ausnahme der Metapodien Verknöcherungszentren haben, folglich verknöchert os cannon etwas später. Als z w e i t e Etappe kann die Verknöcherung der Phalangen bezeichnet werden, welche dadurch charakterisiert wird, dass die I. und III. Phalanx bedeutend früher verknöchern, als die II.

Die d r i t t e Etappe ist die Verknöcherung der Karpal- und Tarsalknochen und schliesslich die v i e r t e—die Verknöcherung des Epiphysen der langen Röhrenknochen.

Die Frage nach dem Zeitpunkt des Auftretens der ersten Verknöherungszentren der Skelettelemente der Extremitäten bei den Haustieren ist in der Literatur in der Form weniger zerstreuter Hinweise in verschiedenen Arbeiten über die Entwicklung der Embryonen enthalten. Indem wir unser Interesse auf die Huftiere konzentrierten gelang es uns eine Reihe von Angaben nach den Arbeiten von Saarni[4], Petersen[3], Carleus[1] Suschkina-Popowa[7]* u. a. zu sammeln, welche die Möglichkeit geben, die Verknöcherungszeit der einzelnen Knochen von *Equus* und *Bos* mit den Ergebnissen meiner Untersuchungen über das Schaf zu vergleichen.

Indem wir die obenbeschriebenen Etappen als leitende Momente benutzten, konnten wir einen Vergleich der Zeiten des Auftretens der Verknöcherungszentren in den einzelnen Knochen ausführen. Es muss erwähnt werden, dass das Alter der Rindviehembryonen annähernd nach Messungen (nach der Tabelle)** bestimmt werden musste, da Petersen in seiner Arbeit solche Daten nicht angibt, wodurch natürlich der Vergleich nicht ganz genau wird. Hiermit musste man sich jedoch abfinden, da es uns nicht gelang, andere derartige Arbeiten zu finden. Ausserdem interessierte sich Petersen im wesentlichen für die Entwicklung der Metapodien, und daher gibt er über die Verknöcherungszeit von Carpus und Tarsus nur flüchtige, allgemeine Angaben. Die angeführten Vergleiche sind durchaus nicht vollständig, erfordern eine Präzisierung und Detaillierung der einzelnen Prozesse, geben aber immerhin eine allgemeine Vorstellung von der sukzessiven Verknöcherung der Extremitäten der untersuchten Arten.

1. E t a p p e. Beim Pferde erfolgt der Beginn der Verknöcherung der langen Knochen der Extremitäten in der 8.—9. Woche, beim Rinde in der 6.—7. Woche, beim Schaf in der 5. Woche.

2. E t a p p e. Für das Pferd weist Saarni und für das Rind Petersen auf die frühe Verknöcherung der III. Phalanx hin. Beim Pferde erfolgt dieser Prozess in der 8.—9. Woche und bei *B. taurus* in der 9.—10 Woche. Unmittelbar nach der Verknöcherung der III. Phalanx verknöchert die I. Bei den von uns untersuchten Schafembryonen gelang es uns nicht, ein Stadium zu

---

* In ihrer sehr detaillierten und eingehenden Arbeit über die Entwicklung der Extremitäten des *Bos* unterbricht Suschkina-Popowa ihre Untersuchungen leider bei den ersten Stadien der Verknöcherung der langen Knochen und gibt ausserdem keine Daten über das Alter der Embryonen an.

** Nach den Angaben von Mischkin: Акушерство гинекология и искусственное осеменение с.-х. животных (1935).

finden, in dem eine Verknöcherung der III. Phalanx allein stattfindet. Es ist durchaus möglich, dass eine solche Aufeinanderfolge auch bei Ovis stattfindet, jedoch konnte sie in der vorliegenden Serie nicht konstatiert werden.

Besonders charakteristisch ist für alle drei Arten der Huftiere die ausserordentlich späte Verknöcherung der II. Phalanx: beim Pferde in der 17., beim Rinde in der 11. und beim Schaf in der 9. Woche.

3. E t a p p e. Die Elemente des Carpus und Tarsus verknöchern verhältnismässig spät. Zuerst tritt ein Verknöcherungzentrum im Calcaneus auf und zwar beim Pferde in der 19. und beim Schaf in der 9. Woche. Der Astragalus verknöchert verhältnismässig früh beim Schaf (in der 10. Woche), beim Pferde dagegen sehr spät (kurz vor der Geburt). Leider ist bei Petersen über diese Knochen beim Rinde nichts gesagt. Die Verknöcherung der übrigen tarsalen Knochen erfolgt beim Pferde in folgender Reihenfolge kurz vor der Geburt: zuerst Os tarsi centrale und Os tarsi 4, alsdann Os tarsi 1+2 und Os tarsi 3. Beim Schaf verknöchern diese tarsalen Elemente früher. Gegen Ende des 2. Drittels des embryonalen Lebens kann man zwei Verknöcherungszentren im Os centrale +Os tarsi 4 bemerken, und zu Beginn des letzten Drittels im Os tarsi 2+3.

Die karpalen Elemente verknöchern beim Pferde in folgender Reihenfolge: im 42-wöchigen Alter hat nur Os accessarium ein Verknöcherungssystem und erst bei der Geburt wird eine Verknöcherung der übrigen Elemente beobachtet; Saarni nimmt an, dass zuerst Verknöcherungszentren im Os carpi intermedium und Os carpi 3, alsdann im Os carpi radiale, danach zugleich im Os carpi ulnare und Os carpi 4 und zuletzt im Os carpi 2 auftreten.

Beim Schaf konnten wir eine etwas andere Reihenfolge beobachten: in der 11. Woche kann man ein ziemlich grosses Verknöcherungszentrum im Os carpi 2+3 und ein kaum merkliches im Os carpi 4 und Os radiale beobachten, und erst beim 16-wöchentlichen Embryo (Beginn des letzten Viertels des embryonalen Lebens) können noch zwei Verknöcherungszentren in der proximalen Reihe festgestellt werden. Leider gelang es nicht, Daten über die Reihenfolge der Verknöcherung der Karpalknochen bei *Bos taurus* zu finden. Petersen beschränkt sich auf die kurze Angabe, dass bei einem Embryo von 25 Wochen sich in diesem Gebiet mehrere Verknöcherungszentren finden liessen.

Ein Vergleich der angeführten Daten gestattet den Schluss, dass im allgemeinen die Verknöcherung des Carpus beim Schaf und Rind früher vor sich geht als beim Pferde, bei dem dieser Prozess auf die allerletzten Stadien des embryonalen Lebens verschoben wird.

4. E t a p p e. Der Beginn der Verknöcherung der Epiphysen der langen Knochen fällt beim Pferde in die letzten Stadien des embryonalen Lebens. Beim Embryo von 42 Wochen fand Saarni noch keine Verknöcherungen in den Epiphysen, während er beim Embryo vor der Geburt eine ganze Reihe derselben zählt; so verknöchern bei Femur und Humerus die distalen, bei Radius und Tibia sowohl die distalen, als auch die proximalen Epiphysen. In den Metapodien sind die proximalen Knochenepiphysen bereits an die Diaphysen angewachsen, während die distalen noch getrennt sind.

Über die Verknöcherung der Epiphysen des Rindes konnten wir keine Angaben finden. Das Studium des Embryos des Fettsteisschafes zeigt, dass bereits in der 17. Woche die Verknöcherung dieser Teile des Skeletts beginnt—in dem bezeichneten Stadium kann man ein grosses Verknöcherungszentrum in den distalen Epiphysen des Femur und ein kaum merkliches in den distalen Epiphysen des Radius finden.

Dieser flüchtige Vergleich der aufeinanderfolgenden Stadien der Verknöcherungen bei den Haustieren gestattet, einige allgemeine Gesetzmässigkeiten aufzuklären: die Verknöcherungen beginnen in den proximalen Knochen der Extremitäten; die Metapodien verknöchern später als die übrigen

langen Knochne. Eine derartige Aufeinanderfolge ist auch für die übrigen Wirbeltiere charakteristisch, wie A. N. Sewertzoff[6] und J. J. Schmalhausen[8] bemerken.

Die dritten Phalangen der III. und IV. Finger verknöchern früher als die zweiten. Diese bei den untersuchten Huftieren beobachtete Eigentümlichkeit ist offenbar mit der Spezifität der Endphalangen als Hauptstützpunkt des Körpers dieser Tiere verknüpft.

Von den karpalen und tarsalen Knochen verknöchert zuerst Calcaneus und danach Astragalus.

Ausserdem kann man eine Reihe spezifischer Eigentümlichkeiten der untersuchten Arten feststellen. So verknöchert die II. Phalanx beim Pferde zu Beginn des zweiten Drittels des embryonalen Lebens, beim Rinde gegen Ende des ersten Drittels und beim Schaf gegen Ende der ersten Hälfte. Der Astragalus verknöchert beim Pferde ganz zum Schluss, während beim Schaf dieser Prozess ungefähr um die Mitte des embryonalen Lebens vor sich geht. Die Verknöcherung der Karpalknochen erfolgt beim Pferde viel später und in anderer Reihenfolge als beim Schaf. Die Verknöcherung der Epiphysen beginnt beim Schaf bereits 4 Wochen vor der Geburt, beim Pferde dagegen erst ganz zu Ende des embryonalen Lebens.

Sewertzowsches Institut
für Evolutions-Morphologie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Moskau.

Eingegangen
d. 9. VI. 1937.

ZITIERTE LITERATUR

[1] O. Carleus, Morpholog. Jahrbuch, 21 (1927). [2] J. Hammond, Growth and the Development of Mutton Qualities in the Sheep (1932). [3] Petersen, Das Morpholog. Jahrbuch; 51 (1922). [4] Z. Saarni, Die intrauterine Entwicklung der Exterimitätenknochen des Pferdes (1919). [5] Sanson, Journ. de l'anat. et de la physiol. (1872). [6] A. N. Sewertzoff, Studien über die Entwicklung der Muskeln, Nerven und des Skeletts der Extremitäten der niederen Tetrapoda (1908). [7] Сушкина-Попова, Бюлл. О-ва испытат. природы (1915). [8] И. И. Шмальгаузен, Ученые записки Импер. московского университета (1915).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVI, № 3

EMBRYOLOGIE

DIE ENTWICKLUNG DER WOLLDECKE BEI DEN KIRGISISCHEN FETTSTEISSCHAFEN

Von A. A. TERENTJEVA

(Vorgelegt von I. I. Schmalhausen, Mitglied der Akademie, d. 9. VI. 1937)

Das Studium der Entwicklung der Wolldecke der verschiedenen Schafrassen im embryonalen Stadium verfolgt das Ziel, den Prozess der Divergenz der Rassenmerkmale am System der Organe, welche die Hauptproduktionsrolle spielen und die Rasse charakterisieren, aufzuklären.

Die vorliegende vorläufige Mitteilung beleuchtet nur die Ordnung des Erscheinens der Wolldecke am Leibe der Embryonen in den verschiedenen Entwicklungsstadien der kirgisischen Fettsteisschafe, welche in der UdSSR endemisch sind und mit welchen eine grosse Selektionsarbeit durchgeführt wird.

Die gegenwärtige Untersuchung ist nur als erste Etappe im Studium der gestellten Frage anzusehen; ferner werden die Beobachtungsergebnisse der Entwicklung der Wollhaare am Fettsteisschafe den Beobachtungsergebnissen an anderen Rassen gegenübergestellt werden.

Die Analyse der Entwicklung der Wolldecke wurde an Fettsteisschafembryonen im Alter von 29 Tagen bis 4 Monaten ausgeführt.

Die Bildung der Wolldecke bei der benannten Schafrasse beginnt im ersten Monat des embryonalen Lebens. In diesem Stadium vollzieht sich die Anlage der Tasthaare (Vibrissen). Die primäre Anlage dieser Kategorie von Haaren entwickelt sich in der Augenregion, am oberen und unteren Lid, sowie an der oberen und unteren Lippe. Bei 35—40 Tage alten Embryonen wird im interokularen Raum das Erscheinen primärer Anlagen der Grannenhaare beobachtet. Bei 45—50-tägigen Embryonen beginnt im interokularen Raum die primäre Bildung der Follikel der intermediären Haare, welche sich neben den Anlagen der Grannenhaare lagern. Bei 60—65-tägiger Entwicklung erscheinen im interokularen Raum zwischen den Grannen- und intermediären Haaren primäre Anlagen von Daunenhaaren. Die Follikel der Keime von Grannen-, intermediären und Daunenhaaren sind gut auf aufgehellten Präparaten der Haut zu sehen. Sie unterscheiden sich scharf voneinander in Durchmesser und Farbe. Dieser Unterschied bleibt während der ganzen Entwicklungszeit bestehen.

Im 45—50-tägigen Alter wird von den Haarkeimen der Grannenhaare der Kopf und der am Kopf anliegende Teil des Halses bedeckt. Die Keime der intermediären Haare bedecken den Scheitel und die Stirnregion. Im Alter von 60—65 Tagen haben die Grannenhaarkeime den Kopf und einzelne Teile der Schulterblätter und der vorderen Extremitäten bedeckt.

Es muss erwähnt werden, dass die Haaranlagen auf den vorderen freien Extremitäten etwas früher erscheinen als auf den hinteren und fast gleichzeitig mit der Entwicklung der Haarkeime in der Region der Schulterblätter. Die intermediären Haarsprossen erscheinen auf der Stirn-, Scheitel- und Schläfenfläche. Daunenhaarkeime sind jedoch nur auf der Fläche zwischen den Augen zu bemerken. Bei Embryonen von 80—85 Tagen bedecken die Grannen- und intermediären Haarkeime alle Teile des Körpers, die Daunenhaarkeime nur den Kopf, Hals, die Gürtel der vorderen und hinteren Extremitäten und die Seiten des Rumpfes. Auf dem Rücken und der Bauchfläche existieren in diesem Stadium noch keine Daunenhaarkeime. Nach 90—95 Tagen der embryonalen Entwicklung sind alle Körperteile von Grannen-, intermediären und Daunenhaarkeimen bedeckt.

In diesem Stadium kann der primäre Durchbruch der Tasthaare (Sinneshaare) durch die Hautoberfläche in der Region der Lider und Lippen konstatiert werden.

Weitere morphologische Beobachtungen zeigten, dass alle Gebiete der Haut nur in der Mitte oder am Ende des vierten Monats des embryonalen Lebens gleichmässig mit Haaren bedeckt werden. Bis zu dieser Periode bedekken die Haare den Körper ungleichmässig. Einige Teile sind intensiv bedeckt, andere bedeutend schwächer; so ist der Kopf intensiver bedeckt als die Körperteile; der Gürtel der vorderen Extremitäten intensiver als der Gürtel der hinteren Extremitäten; der Rücken stärker als die Bauchfläche bedeckt.

Das Durchbrechen der Haare erfolgt in derselben Reihenfolge, wie die Bildung der Haarkeime: zuerst erscheinen sie in der Region des Kopfes, nachher auf der Brust, später auf den Schulterblättern und den Extremitäten. Weiterhin verbreitet sich die Haarbildung auf die Seiten des Rumpfes, den Rücken und zuletzt auf die Bauchfläche.

Die gleiche Erscheinung wie die inselartige Entwicklung der Wolldecke mit gleicher Intensität in verschiedenen Regionen des Tierleibes wird von Galpin (1936) (1) an der neuseeländischen Schafrasse konstatiert.

Die Bildung primärer Haargruppen beobachten wir bei den Fettsteisschafen im zweimonatigen embryonalen Alter. In diesem Stadium treten die aus drei Haarfollikeln bestehenden primären Gruppen besonders klar hervor, aber zwischen den Gruppen aus drei Haaren befinden sich Gruppen, die aus fünf Haarkeimen bestehen. Aus drei Haarkeimen bestehende Haargruppen wurden nur bei zweimonatigen Embryonen gefunden. In den späteren Stadien werden die primären Dreihaargruppen durch Gruppen aus fünf, sieben und mehr Elementen ersetzt.

Die Bildung der ursprünglichen, aus drei Haarfollikeln bestehenden Haargruppen auf dem Tierkörper und der Ersatz dieser Gruppen durch Gruppen mit einer grösseren Anzahl von Haarfollikeln im späteren Stadium des embryonalen Lebens wurde gleichfalls von Galpin festgestellt. Die Bildung primärer Gruppen aus drei Härchen wird auch in den Arbeiten von Weber(2) bestätigt.

In der Praxis der Wollkunde ist seit langem bekannt, dass die Dicke der Haut und die Dichte der Hautschichten einen bestimmten Einfluss auf die Qualität der Wolldecke ausüben.

Die Untersuchung der Entwicklung der Hautdecke und der Haarbekleidung hat gezeigt, dass zwischen der Haut und dem Haar eine bestimmte Abhängigkeit existiert: die Entwicklung der ersteren bedingt die Entwicklung der zweiten. Diese Abhängigkeit ist deutlich in den ersten Stadien des embryonalen Lebens ausgeprägt. Bei den Embryonen der kirgisischen Fettsteisschafe im Alter von 36—40 Tagen embryonaler Entwicklung weist die Hautdecke an den verschiedenen Körperstellen folgende Dicke auf: die Dicke der Haut auf dem Kopfe beträgt 24 μ, auf dem Schenkel—10 μ, auf

dem Rücken—10 μ, auf den Seiten—10 μ und auf dem Bauche—7 μ. Die Epidermis der Kopfhaut ist vielschichtig; sie wird von der eigentlichen Haut durch die Keimschicht getrennt. Die eigentliche Haut ist durch eine kompakte Schicht, welche aus einem lockeren Bindegewebe besteht, dargestellt. Die Tiefe der Kopfepidermis beträgt 2 μ, Derma—22 μ. Was dagegen die übrigen Teile der Hautdecke anbetrifft, so ist in denselben noch keine so deutliche Differenzierung der Hautschichten zu bemerken. Dort weist die Epidermis wenig Schichten auf, und das Korium besteht aus einem lockeren Bindegewebe. Die primäre Bildung von Grannenhaarkeimen wird in der Region der Kopfhaut festgestellt. In den anderen Regionen der Haut ist dieses nicht festgestellt, da die Hautdecke noch nicht genügend differenziert ist und die Hautschichten noch nicht die gehörige Tiefe besitzen. Wie aus den oben angeführten Beispielen der Dicke der Hautdecke zu ersehen ist, ist der Zustand der einzelnen Hautschichten auf verschiedenen Körperteilen ungleich, was besonders in frühen Entwicklungsstadien beobachtet wird. Was aber die Entwicklung der Haardecke der Tiere anbetrifft, so geht dieselbe im engen Zusammenhang mit der Ausbildung und Differenzierung der Hautschichten vor sich.

Unsere Untersuchung der Hautdecke hat gezeigt, dass die Haut auf dem Körper des Tieres sich gewissermassen in einzelnen Regionen entwickelt; einige derselben bestehen in bestimmten Entwicklungsstadien aus bereits mehr formierten dichteren Hautschichten, die anderen dagegen aus weniger formierten, d. h. in diesem Stadium haben sich die Schichten der Haut noch nicht voneinander abgesondert. Da, wo die Schichten der Hautdecke beim Embryo eine bestimmte Differenzierung erreicht haben, erfolgt die Anlage der Haare.

Hieraus folgt, dass zwischen der Entwicklung der Haut und der Entwicklung des Haares eine bestimmte Abhängigkeit besteht die den Entwicklungsgrad der Haardecke noch im embryonalen Zustand des Tieres bestimmt.

Die vorliegende vorläufige Mitteilung ist ein Kapitel aus einer grossen Arbeit über die vergleichende Ontogenese der Wolldecke der verschiedenen Rassen.

Sewertzowsches Institut
für Evolutions-Morphologie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR
Moskau.

Eingegangen
d. 9. VI. 1937.

ZITIERTE LITERATUR

[1] Galpin, Journ. of Agric. Sci. Oct. XXV (1935). [2] Weber, Die Säugetiere. Einführung in die Anatomie und Systematik, 27—28 Jahrgang.

PRIX D'ABONNEMENT

Un an — 36 livraisons . . . . . $ 15
Six mois — 18 livraisons . . . $ 7.50
(Séparément $ 0.50 le numéro)
«Nouvelle Série» pour 1933 — 6 livraisons . . . $ 2
«Nouvelle Série» pour 1934 — l'année complète épuisée; volume III (9 livraisons) et volume IV (9 livraisons) en vente à $ 3 le volume.

URSS — Mezhdunarodnaja Kniga, 18, Kuznetskij Most, Moscou (Compte courant n° 263 Banque d'Etat de l'URSS, 12, Neglinnaja, Moscou).
NORTH and SOUTH AMERICA — BOOKNIGA CORPORATION. 255 Fifth Avenue. New York, N. Y.
GREAT BRITAIN — W. H. SMITH & son, Ltd. Strand House, Portugal St London, W. C. 2.
FRANCE — MESSAGERIES HACHETTE. Service Abonnements. 111, Rue Réaumur. Paris, 2e.
SUISSE — Administration du Journal „LE TRAVAIL". 39, Rue de Lausanne. Genève.
ROUMANIE — Deposit de Ziare Luvru. Calea Victoriei 30. Bucarest.
Č. S. R. — MELANTRICH, Akc. Spol. Knihkupectvi — odd. slovanskych knih. Vaclavské nam 42. Praha II. (Ucet post. spor. 20. 208).
BELGIQUE — LIBRAIRIE A.U.S. 38. Vieille Halle-aux-Blés. Bruxelles (C. C. P. 1861. 15 P. Driessen).
CHINA — AMERICAN BOOK & SUPPLY Co 841 Bubbling Well Road. P. O. Box 1798. Shanghai.
HOLLAND — J. GINSBERG. University Bookseller. Kort Rapenburg, 17. Leiden
LIETUVA — „MOKSLAS". Knygynas. Laisves Aleja, 46. Kaunas.
TURQUIE — LIBRAIRIE HACHETTE. Succursale de Turquie. 469, Avenue de l'Indépendance. Boîte Postale Pera 2219. Istanbul.
POLSKA — GEBETHNER & WOLFF. Filja I. Krakowskie Przedm. 15. Warszawa.
ROSSICA. Chmielna 5. Warszawa.
KSIEGARNIA GIRSZOWSKIEGO. Zamkowa 13. Wilno.
PALESTINE — SAFRAN Co. Jaffa Rd. 36. P. O. B. 223. Haifa.
BULGARIA — T. F. TSCHIPEFF. Buchhandlung. Boulevard Dondoukoff 20/22 Sofia. (Postscheckkonto-Sofia 540).
SVERIGE — C. E. FRITZE'S Kgl, Hofbuchhandlung. Fredsgatan, 2 Stockholm.
LATVIJA — A./S. VALTERS un RAPA. Teatra iela Nr. 11. Riga (Pasta tek. rek Nr. 675)
NORGE — JOHAN GRUNDT TANUM. Tidligere Aschehougs Boghandel. Karl Johans gt. 43. Oslo.

Les «Comptes Rendus», largement expédiés à l'étranger dans les centres scientifiques les plus importants et dans les bureaux de nombreuses revues, sont le seul organe scientifique en URSS, donnant tous les dix jours un compte rendu des plus récentes données de la science soviétique.

Prix — $ 0.50